Komplexe Analysis
Skriptum zur Vorlesung im SS 2013

Bernhard Lamel

1. Der Körper der komplexen Zahlen

1.1. Von Definition zur Vorstellung. Viele von uns kennen den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ noch aus der Schule; er besteht aus Ausdrücken der Form $a + \imath b$, wo $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind. Mit diesen rechnet man wie mit reellen Zahlen, und verwendet die Regel $\imath^2 = -1$. Etwas kryptisch kann man auch sagen, dass $\imath = \sqrt{-1}$ ist.

Die Definition einer komplexen Zahl in dieser Form hat den Vorteil, dass die Körperaxiome fast von selbst folgen (man hat ja die Rechenoperationen gerade so definiert); das neutrale Element bezüglich der Addition ist $0 = 0 + \imath 0$, jenes bezüglich der Multiplikation ist $1 = 1 + \imath 0$. Eine Ausnahme bildet die Existenz eines multiplikativen Inversen zu $a + \imath b$, wenn $a^2 + b^2 \neq 0$. Hier kann man sich behelfen, indem man die Gleichungen

$$1 = (a + \imath b)(c + \imath d) = (ac - bd) + \imath(ad + bc)$$

als reelle Gleichungen

$$\begin{aligned} ac - bd &= 1 \\ ad + bc &= 0 \end{aligned}$$

anschreibt und löst, was

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

liefert, und damit die Existenz eines multiplikativen Inversen sicherstellt.

Andererseits hat diese Definition einer komplexen Zahl den Nachteil, dass wir kein "echtes" Objekt bekommen haben. Die formale Definition kennen Sie aus der Einführungsvorlesung. Der Übergang von einem Objekt, von dem man eigentlich nur weiss, wie es sich unter gewissen algebraischen Operationen verhält, zu einem formal korrekt definierten Objekt ist oft nicht schwer, aber wichtig. Schliesslich wollen wir ja wissen, dass es die Dinge, mit denen wir rechnen wollen, auch tatsächlich "gibt".

In diesem Sinn definieren wir, dass der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Menge der $\mathbb{R}^2$ ist, also aus Paaren reeller Zahlen besteht. Der $\mathbb{R}^2$ wird mit der üblichen Vektorraumaddition und Skalarmultiplikation versehen, also mit den Operationen, welche durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad c(a, b) = (ca, cb), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

erklärt werden. Wir müssen nun eine Multiplikation einführen, bei der wir uns am gewünschten Ergebnis orientieren und so

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

definieren. Wenn wir nun $1 = (1, 0)$ und $\imath = (0, 1)$ schreiben, so ist der Ausdruck $a + \imath b$ tatsächlich ein Paar von reellen Zahlen, nämlich (a, b). Die Körperaxiome kann man nun nachrechnen (und in der Einführungsvorlesung haben Sie dies auch gemacht). Den schwierigsten Teil, die Berechnung des multiplikativen Inversen haben wir schon erledigt, und wir können

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

schreiben. Der Körper $\mathbb{R}$ wird mit Hilfe von $\iota\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\iota r = (r, 0)$ mit einem Unterkörper von $\mathbb{C}$ identifiziert, welchen wir einfach wieder mit $\mathbb{R}$ bezeichnen.

1.2. Die Gaußebene und Polarkoordinaten. Diese zweite Definition hat auch den Vorteil, dass wir uns unter dem $\mathbb{R}^2$ etwas vorstellen können: Es handelt sich einfach um die Ebene, welche wir als Modell für die komplexen Zahlen auch gerne als "Gaußsche Zahlenebene", oder einfach als Gaußebene bezeichnen. Wir identifizieren also die komplexe Zahl $z = x + \imath y$ mit dem Vektor im $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten (x, y). Die Koordinatenachsen in dieser Ebene werden als die *reelle Achse* (für die Gerade $y = 0$) und die *imaginäre Achse* (für die Gerade $x = 0$) bezeichnet. Die erste Koordinate einer komplexen Zahl $z = x + \imath y$ ist ihr *Realteil* und wird mit $\operatorname{Re} z := x$ bezeichnet, die zweite Koordinate ist ihr *Imaginärteil* und wird mit $\operatorname{Im} z := y$ bezeichnet. Die Länge einer komplexen Zahl z wird mit $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ im Sinne der Pythagorasformel festgelegt.

Die Körperoperationen besitzen einfache Interpretationen in der Gaußebene. Die Addition einer komplexen Zahl (a, b) ist–als Abbildung der Ebene auf sich selber–einfach die Verschiebung der Ebene um diesen Vektor. Bei der Multiplikation mit einer fixen komplexen Zahl $w = a+\imath b$ ist es vorteilhaft, sich die Matrix der durch $M_w : z \mapsto zw$ gegebenen linearen Abbildung des $\mathbb{R}^2$ auszurechnen, welche bezüglich der Einheitsbasis $\{1, \imath\} \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

gegeben ist. In der letzten Darstellung sehen wir, dass das Bild des ersten Einheitsvektors (die erste Spalte der Matrix) orthogonal zum Bild des zweiten Einheitsvektors (der zweiten Spalte der Matrix) ist, also die Abbildung eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ gefolgt von einer Streckung um $|w|$ ist. Der Drehwinkel, also der von w und der positiven rellen Achse eingeschlossene Winkel, wird als *Argument* von w bezeichnet und ist offensichtlich nur auf ganzzahlige Vielfache von 2π festgelegt; man schreibt dann mehrdeutig $\arg w$ für ein Argument von w, und $\operatorname{Arg} w$ für jenen Winkel, welcher $-\pi < \operatorname{Arg} w \leq \pi$ erfüllt (man bezeichnet $\operatorname{Arg} w$ als den Hauptzweig des Arguments).

Sie könnten jetzt argumentieren, dass wir wir das Argument $\arg w$ als eine Äquivalenzklasse der durch $\alpha \cong \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$ gegebenen Äquivalenzrelation definieren sollten. Es ist in der komplexen Analysis jedoch durchaus üblich, mit mehrdeutigen Argumenten zu arbeiten–oft ist dies bei der analytischen Fortsetzung von "Funktionenkeimen" notwendig. Man mnuss nur ein wenig Vorsicht walten lassen, da Gleichungen der Form $\arg(w_1 w_2) = \arg(w_1) + \arg(w_2)$ nur modulo $2\pi\mathbb{Z}$ gelten können. Die Gleichung selber ergibt sich, da eine Drehung um die Summe $\alpha + \beta$ zweier Winkel der Hintereinanderausführung einer Drehung um α und einer um β entspricht. Auf der anderen Seite ist die Gleichung $\operatorname{Arg} w_0 w_1 = \operatorname{Arg} w_0 + \operatorname{Arg} w_1$ meistens einfach falsch. Zum Beispiel ist $\operatorname{Arg}(-1)^2 = \operatorname{Arg}(1) = 0$, aber $2\operatorname{Arg}(-1) = 2\pi$.

Also ist ein beliebiges Argument $\arg w$ von w durch die Gleichungen

$$\cos(\arg w) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\arg w) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Daraus ergibt sich $\tan(\arg w) = b/a$ und damit die aus der Schule bekannte Formel

$$\operatorname{Arg} w = \arctan \frac{b}{a}, \quad a > 0,$$

welcher durch entsprechende Festlegungen auch für $a < 0$ Sinn gegeben werden kann.

Wir haben damit ein zweites Koordinatensystem für die Gaußebene, die *Polarkoordinaten*, für welche wir (r, φ) schreiben. Dabei sind $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ mit (x, y) durch

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg(x + iy)$$

verbunden. Um eine eindeutige Festlegung des Arguments zu erreichen, muss man sich wieder auf ein Intervall der Länge 2π festlegen; wir verwenden wie schon vorher $-\pi < \varphi \leq \pi$, also $\varphi = \operatorname{Arg}(x+iy)$, falls wir eine solche Eindeutigkeit benötigen. Wenn wir zunächst ohne Rechtfertigung die *Eulersche Formel* $e^{\imath\varphi} = \cos(\varphi)+\imath\sin(\varphi)$ verwenden, so können wir $z = re^{\imath\varphi}$ schreiben. Man beachte, dass wir Koordinaten im eigentlichen Sinn "nur" für die punktierte Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ erhalten, da für $r = 0$ das Argument jeden beliebigen Wert annehmen kann.

Die Multiplikation hat in Polarkoordinaten die Darstellung $(r, \varphi)(s, \psi) = (rs, \varphi + \psi)$, oder in unserer Schreibweise von zuvor $re^{\imath\varphi}se^{\imath\psi} = rse^{\imath(\varphi+\psi)}$. Die aus der Schule bekannte "Formel von de Moivre" bekommt die einfache Form $(re^{\imath\varphi})^n = r^n e^{\imath n\varphi}$.

1.3. Wurzeln komplexer Zahlen und die quadratische Lösungsformel. Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl w sind die Lösungen der Gleichung $z^n = w$. Schreiben wir in Polarkoordinaten $w = se^{\imath\psi}$, so sehen wir, dass $z = re^{\imath\varphi}$ die Gleichungen

$$r^n = s, \quad n\varphi = \psi \mod 2\pi\mathbb{Z},$$

erfüllen muss, mit anderen Worten,

$$r = \sqrt[n]{s}, \quad \varphi = \varphi_k = \frac{\psi + 2k\pi}{n} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt $e^{\imath\varphi_k} = e^{\imath\varphi_{k+jn}}$ für beliebiges $j \in \mathbb{Z}$, da sich die Winkel nur um $2\pi j$ unterscheiden. Also erhalten wir insgesamt (solange $s \neq 0$ ist) n verschiedene Lösungen $z_0, \dots, z_{n-1}$ unserer Gleichung $z^n = w$, welche explizit durch

$$z_0 = \sqrt[n]{s}e^{\frac{\imath\psi}{n}},\ z_1 = \sqrt[n]{s}e^{\frac{\imath(\psi+2\pi)}{n}},\ \dots,\ z_{n-1} = \sqrt[n]{s}e^{\frac{\imath(\psi+2(n-1)\pi)}{n}}.$$

Die Punkte z_j bilden die Eckpunkte eines regelmässigen n-gons mit Mittelpunkt 0. Einer der z_j erfüllt, dass $-\pi < n \operatorname{Arg} z_j \leq \pi$, und wir bezeichnen diese Zahl als den *Hauptzweig* der n-ten Wurzel, und schreiben $z_j =: w^{\frac{1}{n}}$. $w^{\frac{1}{n}}$ ist also durch $\arg w^{\frac{1}{n}} = (\operatorname{Arg} w)/n$ bestimmt. Ein Wort der Warnung: Ähnlich wie beim Hauptzweig des Arguments darf man sich nicht erwarten, dass der Hauptzweig der Wurzel die Gleichung $(w_0 w_1)^{\frac{1}{n}} = w_0^{\frac{1}{n}} w_1^{\frac{1}{n}}$ erfüllt. So ist zum Beispiel $(-1)^{\frac{1}{2}} = \imath$, aber $(-\imath)^{1/2} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2})$, also $((-\imath)^2)^{\frac{1}{2}} = \imath \neq -\imath = ((-\imath)^{\frac{1}{2}})^2$.

Ein Spezialfall sind die n-ten *Einheitswurzeln*, also die Lösungen der Gleichung $\zeta^n = 1$. Sie sind gegeben durch

$$\zeta_0 = 1, \quad \zeta_1 = e^{\frac{2\pi\imath}{n}}, \dots, \zeta_{n-1} = e^{\frac{2(n-1)\pi\imath}{n}},$$

also gilt insbesondere $\zeta_j = \zeta_1^j$. Man überprüft, dass die n-ten Einheitswurzeln eine multiplikative Untergruppe von $\mathbb{C}$ bilden, welche isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung n ist (ein expliziter Isomorphismus ist durch $j \mapsto \zeta_1^j$ gegeben). Mit Hilfe der Einheitswurzeln können wir die n-ten Wurzeln von w auch (unter Umständen mit einer anderen Numerierung als vorher)

$$z_j = \zeta_1^j w^{\frac{1}{n}}, \quad j = 0, \dots, n-1$$

schreiben.

Will man eine quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, lösen, so verwendet man die bekannte Lösungsformel

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Zur Erinnerung: Wenn wir $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ setzen, so folgt aus dem Ansatz $z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2)$, dass

$$z_1 + z_2 = -p, \quad z_1 z_2 = q.$$

Wir setzen $z_1 = -\frac{p}{2} + D$, $z_2 = -\frac{p}{2} - D$, und erhalten so $q = z_1 z_2 = \frac{p^2}{4} - D^2$, also $D = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Wir substituieren:

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.4. Eine weitere Konstruktion: Adjunktion der Wurzel $\sqrt{-1}$. Eine weitere Möglichkeit, den Körper $\mathbb{C}$ zu konstruieren, ist über die Adjunktion einer Nullstelle von $1 + x^2$. Im Polynomring $\mathbb{R}[x]$ ist das Polynom $1 + x^2$ irreduzibel (da es keine reellen Nullstellen hat, und jeder nichttriviale Faktor ein lineares Polynom wäre). Wir führen im Ring $\mathbb{R}[x]$ eine Äquivalenzrelation mittels

$$p(x) \sim q(x) :\Leftrightarrow p(x) - q(x) = (1 + x^2)h(x)$$

für ein $h \in \mathbb{R}[x]$ ein. Die Menge der Vielfachen von $1 + x^2$ wird mit

$$(1 + x^2) = \{(1 + x^2)h(x) \colon h \in \mathbb{R}[x]\}$$

bezeichnet (das von $1 + x^2$ erzeugte *Hauptideal*), und die Menge der Äquivalenzklassen mit

$$\mathbb{R}[x]\big/(1 + x^2) = \{[p(x)] \colon p(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Es ist einfach zu zeigen, dass $\mathbb{R}[x]\big/(1+x^2)$ durch $[p(x)] + [q(x)] := [p(x) + q(x)]$ zu einer abelschen Gruppe wird (und Sie sollten das überprüfen); die Operation $[p(x)][q(x)] = [p(x)q(x)]$ macht $\mathbb{R}[x]\big/(1+x^2)$ zu einem (kommutativen) Ring mit Einselement $[1]$.

Wir überprüfen an dieser Stelle nur, dass die Festsetzung der Multiplikation tatsächlich gerechtfertigt ist. Sei also $[p(x)] = [\tilde{p}(x)]$ und $[q(x)] = [\tilde{q}(x)]$, also $p(x) - \tilde{p}(x) = (1+x^2)g(x)$ und $q(x) - \tilde{q}(x) = (1+x^2)h(x)$ mit $g, h \in \mathbb{R}[x]$. Dann ist

$$\begin{aligned}
p(x)q(x) - \tilde{p}(x)\tilde{q}(x) &= p(x)q(x) - p(x)\tilde{q}(x) + p(x)\tilde{q}(x) - \tilde{p}(x)\tilde{q}(x) \\
&= p(x)(q(x) - \tilde{q}(x)) + q(x)(p(x) - \tilde{p}(x)) \\
&= p(x)(1+x^2)h(x) + q(x)(1+x^2)g(x) \\
&= (1+x^2)(p(x)h(x) + q(x)g(x)),
\end{aligned}$$

also $[p(x)q(x)] = [\tilde{p}(x)\tilde{q}(x)]$.

Tatsächlich ist der Faktorring $\mathbb{R}[x]/(1+x^2)$ ein Körper. Sei nämlich $[p(x)] \neq [0]$, so gibt Division von $p(x)$ durch $(1+x^2)$ eine Zerlegung

$$p(x) = (1+x^2)q(x) + r(x),$$

wobei $r(x)$ konstant oder linear ist, jedoch nicht 0 (da sonst $p(x)$ ein Vielfaches von $1+x^2$ wäre). Wir dividieren nun $1+x^2$ durch $r(x)$ und erhalten so $1+x^2 = r(x)s(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Da $1+x^2$ keine reellen Nullstellen besitzt, ist $c \neq 0$. Wir haben nun $r(x) = p(x) - (1+x^2)q(x)$, also $c = (1+x^2) - r(x)s(x) = (1+x^2) - (p(x) - (1+x^2)q(x))s(x) = -s(x)p(x) + (1+x^2)(1+p(x)q(x))$, und damit $[p(x)][-s(x)] = [c] = [1]$. Wir haben damit ein multiplikatives Inverses zu $[p(x)]$ konstruiert.

Dieser Körper wird als Vektorraum über $\mathbb{R}$ durch die Nebenklassen $[1]$ von 1 und $[x]$ von x erzeugt, und die Identifikation von $[1]$ mit $1 \in \mathbb{C}$ und $[x]$ mit $\imath \in \mathbb{C}$ ist–wie man sich leicht überzeugt–ein Körperisomorphismus.

Man sagt, $\mathbb{C}$ entsteht aus $\mathbb{R}$ durch Adjunktion einer Nullstelle von $1+x^2$. Dass dieser Prozess mit $\mathbb{C}$ ein natürliches Ende findet, also jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, ist ein nichttrivialer Satz (der *Fundamentalsatz der Algebra*) welchen wir später beweisen werden.

Die Körperisomorphismen von $\mathbb{C}$, welche $\mathbb{R}$ fixieren (die *Galoisgruppe* der Körpererweiterung $\mathbb{R}\colon \mathbb{C}$), besteht aus der Identität und der *Konjugation* (der Spiegelung an der reellen Achse)

$$z = x + \imath y \mapsto \bar{z} = x - \imath y.$$

Man bezeichnet $\bar{z}$ als die *komplex konjugierte Zahl* zu z und sagt auch oft "z quer". Der Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl berechnet sich mit Hilfe der komplex Konjugierten durch

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2\imath}.$$

Die reelle Achse wird durch $z = \bar{z}$ definiert, und die imaginäre Achse durch $z = -\bar{z}$.

1.5. Winkel, Flächen, und Elementargeometrie. Um in $\mathbb{C}$ Entfernungen, Flächen, und Winkel zu messen, versehen wir $\mathbb{C}$ mit einem *hermiteschen Produkt*. Ein hermitesches Produkt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften

$$\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \quad \langle u, u \rangle > 0 \, (u \neq 0),$$

wo $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Das Standardprodukt auf $\mathbb{C}$ ist durch

$$\langle z, w \rangle = z\bar{w}$$

gegeben. Der Realteil eines hermiteschen Produkts ist ein reelles inneres Produkt (wobei die $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur durch Einschränkung gegeben ist), der Imaginärteil ist wegen $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ eine schiefsymmetrische Form. In $\mathbb{C}$ ist für $z = x + \imath y$, $w = s + \imath t$,

$$\operatorname{Re}\langle z, w \rangle = xs + yt = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}\langle z, w \rangle = -xt + ys = \begin{vmatrix} s & x \\ t & y \end{vmatrix}.$$

Die Länge (oder auch Absolutbetrag oder einfach Betrag) einer komplexen Zahl ist durch $|z|^2 = z\bar{z}$ gegeben.

Der Absolutbetrag erfüllt die *Dreiecksungleichung*

$$|z+w| \leq |z| + |w|,$$

welche wir oft verwenden werden. Sie ist eine direkte Folgerung aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, welche die Form

$$|\operatorname{Re}\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$$

nimmt. Der Beweis erfolgt wie im reellen (und tatsächlich handelt es sich hier nur um eine Aussage über den Realteil des Produkts). Wir betrachten also das (reelle) Polynom $p(t) = \langle u + tv, u + tv\rangle = \langle u, u\rangle + 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle t + \langle v, v\rangle t^2$. Da $p(t) \geq 0$, ist insbesondere für die Nullstelle $t_0 = -\frac{\operatorname{Re}\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$ der Ableitung p' (wo $p(t)$ ein Minimum annimmt) $p(t_0) \geq 0$, was nach Einsetzen

$$0 \leq \langle u + t_0 v, u + t_0 v\rangle = \langle u, u\rangle - 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle \frac{(\operatorname{Re}\langle u, v\rangle)^2}{\langle v, v\rangle} + \frac{(\operatorname{Re}\langle u, v\rangle)^2}{\langle v, v\rangle},$$

also die Behauptung, ergibt. Wir beachten, dass Gleichheit genau dann besteht, wenn u und v auf derselben Geraden liegen. Man folgert nun die Dreiecksungleichung wegen

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\langle z, w\rangle + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Der Winkel φ zwischen z und w ist durch

$$\cos(\varphi) = \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2|z||w|} = \frac{\operatorname{Re} z\bar{w}}{|z||w|}$$

gegeben. Diese Aussage hat eine einfache geometrische Interpretation: Die Multiplikation mit $\bar{w}$ rotiert die Ebene, sodass die Gerade durch w zur reellen Achse wird. Dabei rotiert die Gerade durch z zur Geraden durch $z\bar{w}$. Der Winkel, den diese Gerade mit der reellen Achse einschliesst, ist offensichtlich durch die gegebene Formel gegeben. Wir sehen so auch, dass $\varphi = \arg z\bar{w}$, und wir können die verschiedenen Formeln für das Argument anwenden um φ zu berechnen.

Die Gleichung einer Geraden g bestimmt sich durch den Steigungswinkel φ der Geraden und einem Punkt z_0 auf ihr durch

$$g\colon\ \operatorname{Im}(z - z_0)e^{-\imath\varphi} = 0.$$

Sind zwei Punkte z_0, z_1 einer Geraden g gegeben, so ist ihre Gleichung

$$g\colon\ \operatorname{Im}(z - z_0)\overline{(z_1 - z_0)} = \operatorname{Im} z\overline{(z_1 - z_0)} - z_0\bar{z}_1 = 0.$$

Übungsaufgabe 1. Zeige, dass der Schnittpunkt z der Geraden, welche durch die Punkte z_0, z_1 und w_0, w_1 bestimmt werden, durch

$$z = \frac{(z_1 - z_0)(w_0\bar{w}_1 - w_1\bar{w}_0) + (w_1 - w_0)(z_0\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_0)}{(z_1 - z_0)(\bar{w}_1 - \bar{w}_0) - (w_1 - w_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)}$$

bzw.

$$z = \frac{\operatorname{Im} w_0\bar{w}_1}{\operatorname{Im}(z_1 - z_0)(\bar{w}_1 - \bar{w}_0)}(z_1 - z_0) + \frac{\operatorname{Im} z_0\bar{z}_1}{\operatorname{Im}(z_1 - z_0)(\bar{w}_1 - \bar{w}_0)}(w_1 - w_0)$$

gegeben ist.

Der Imaginärteil der Form $\langle z, w\rangle$ entspricht der (negativ) signierten Fläche des von z und w (in dieser Reihenfolge) aufgespannten Parallelograms, wie man aus der Determinantenformel von oben sieht. Eine interessante Anwendung ist die folgende Flächenformel F des Dreiecks mit Eckpunkten $A, B, C \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}(B - A)\overline{(C - A)} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}(B\bar{C} - A\bar{C} - B\bar{A}) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}(B\bar{C} - A\bar{C} + \underbrace{A\bar{C} + C\bar{A}}_{\in\mathbb{R}} - B\bar{A} + \underbrace{B\bar{A} + A\bar{B}}_{\in\mathbb{R}}) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}(A\bar{B} + B\bar{C} + C\bar{A}).
\end{aligned}$$

1.6. Lineare Funktionen. $\mathbb{C}$ ist sowohl ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, als auch über $\mathbb{R}$. Wenn wir von einer linearen Abbildung $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sprechen, müssen wir damit spezifizieren, auf welchen Grundkörper wir uns beziehen. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung (ein lineares Funktional) $L\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ist (wie bei jedem Körper, welcher als Vektorraum über sich selbst betrachtet wird) einfach die Multiplikation mit der Konstanten $L(1) \in \mathbb{C}$, da $L(z) = L(z1) = zL(1)$. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch Multiplikation mit einer 2×2 Matrix mit reellen Einträgen gegeben, also durch

$$z = (x + \imath y) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by) + \imath(cx + dy).$$

Die Abbildung T ist genau dann sogar $\mathbb{C}$-linear, wenn sie mit der Multiplikation mit $\imath$ kommutiert, also wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

oder ausmultipliziert

$$\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix},$$

also $a = d$ und $b = -c$ ist (was wir im Grunde natürlich schon wissen, da wir ja die Multiplikation mit einer komplexen Zahl als Drehstreckung identifiziert haben).

Die $\mathbb{R}$-linearen Funktionale $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ bilden eine Basis der $\mathbb{R}$-linearen Funktionale auf $\mathbb{C}$, und wir können damit jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung T so wie oben als

$$Tz = (\operatorname{Re} z)(a + \imath c) + (\operatorname{Im} z)(b + \imath d) = (\operatorname{Re} z)\alpha + (\operatorname{Im} z)\beta$$

schreiben. Oft ist es allerdings bequemer, die $\mathbb{R}$-linearen Funktionen z und $\bar{z}$ zu verwenden, und so

$$\begin{aligned} Tz &= \frac{1}{2}(z + \bar{z})(a + \imath c) + \frac{1}{2\imath}(z - \bar{z})(b + \imath d) \\ &= z\frac{1}{2}(a + d + \imath(c - b)) + \bar{z}\frac{1}{2}(a - d + \imath(c + b)) \\ &= z\frac{\alpha - \imath\beta}{2} + \bar{z}\frac{\alpha + \imath\beta}{2}. \end{aligned}$$

zu schreiben. Eine $\mathbb{C}$-lineare Funktion zeichnet sich dann durch das Verschwinden des Koeffizienten von $\bar{z}$ aus.

1.7. Die Topologie von $\mathbb{C}$ und die erweiterte komplexe Ebene. Die Topologie von $\mathbb{C}$ wird mit Hilfe von einfachen Mengen definiert; es bieten sich einerseits *offene Kreisscheiben*

$$D_r(p) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - p| < r\},$$

sowie *offene Rechtecke*

$$R_{l,b}(x + iy) = (x - l/2, x + l/2) \times (y - b/2, y + b/2)$$

an. Die Familien aller solcher bilden jeweils eine Basis einer Topologie auf $\mathbb{C}$, welche mit der Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt. Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist also *offen*, wenn für jedes $p \in U$ ein $r(p)$ existiert, sodass $D_{r(p)}(p) \subset U$; $F \subset \mathbb{C}$ ist *abgeschlossen*, wenn F^c offen ist. Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind wieder offen, endliche Durchschnitte offener Mengen offen; komplementär dazu sind beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen, und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Die Punkte mit rationalen Koordinaten bilden eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ erfüllt sowohl das erste als auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom (Existenz von abzählbaren Umgebungsbasen und Basen).

Der *Abschluss* $\bar{X}$ einer Teilmenge X ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, welche X enthalten, und das *Innere* X° einer Menge X die Vereinigung aller offenen Mengen, welche in X enthalten sind. Die Differenz $bX = \bar{X} \setminus X^\circ$ ist der *Rand* von X.

Eine Folge von Punkten z_j konvergiert gegen den Punkt $p \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert sodass $z_j \in D_\varepsilon(p)$ ist. Wir schreiben dann $\lim_{j\to\infty} z_j = p$ oder $z_j \to p\,(j \to \infty)$. Es stellt sich heraus, dass eine Menge X genau dann abgeschlossen ist, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge $x_j \to x\,(j \to \infty)$ mit $x_j \in X$ wieder in X liegt.

Kompakte Mengen in $\mathbb{C}$ werden mit Hilfe des Satzes von Heine-Borel charakterisiert: Für eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ ist damit äquivalent, dass K beschränkt und abgeschlossen ist, dass K die Eigenschaft hat, dass jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, welche zu einem Element von K konvergiert, sowie, dass jede Überdeckung von K durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Um Grenzwerte von Funktionen zu beschreiben, greifen wir auf punktierte Kreisscheiben zurück; das sind Mengen von der Form

$$\dot{D}_r(p) = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z-p| < r\}\,.$$

Wir sagen, dass eine Funktion $f \colon \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ den Grenzwert q für $z \to p, z \in X$ besitzt wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f(\dot{D}_\delta(p)) \subset D_\varepsilon(q)$. Wir schreiben dann $f(z) \to q\,(z \to p, z \in X)$ oder

$$\lim_{\substack{z\to p\\ z\in X}} f(z) = q.$$

Wenn X eine offene Umgebung von p enthält, so können wir $z \in X$ in dieser Notation unterdrücken.

Oft ist es auch notwendig, das Verhalten von Funktionen wie $z \mapsto z^{-1}$ an der Stelle 0 zu beschreiben. Um dies handhaben zu können, ist es notwendig, einen Ersatz für die bestimmte Divergenz, welche wir aus der reellen Analysis kennen, einzuführen. Man fügt dazu einen Punkt ∞ zur Gaußebene hinzu und definiert die *erweiterte Gaußebene* $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Eine Umgebung von ∞ ist eine Menge, welche das Äussere einer Kreisscheibe enthält; wir definieren, um konsistent zu bleiben, offene Kreisscheiben um ∞ als

$$D_r(\infty) = \left\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > \frac{1}{r}\right\} \cup \{\infty\}, \quad \dot{D}_r(\infty) = \left\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > \frac{1}{r}\right\}.$$

Dies erlaubt es uns, “kleine” r mit “kleinen” Kreisscheiben um ∞ zu verbinden. Offene Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$ sind solche, welche mit jedem ihrer Punkte eine offene Kreisscheibe um diesen Punkt enthalten; die Konvergenz von Folgen gegen ∞ bzw. von Funktionen für $z \to \infty$ wird genauso beschrieben wie vorher. Die erweiterte Gaußebene ist kompakt.

1.8. Nochmals die erweiterte Ebene. Die erweiterte komplexe Ebene können wir mit der projektiven komplexen Ebene $\mathbb{PC}$ identifizieren, also dem Raum der komplexen Geraden im $\mathbb{C}^2$. Formal definieren wir $\mathbb{PC}$ als den Raum der Äquivalenzklassen von Punkten in $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ unter der Äquivalenzrelation $\sim$, wo $(z,w) \sim (z',w')$ wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt mit dem $\lambda z = z'$ und $\lambda w = w'$ gilt. Die Äquivalenzklasse von (z,w) wird mit $[z:w]$ bezeichnet, und $[z:w]$ sind *homogene Koordinaten*.

Wir finden $\mathbb{C} \subset \mathbb{PC}$ durch $z \mapsto [z:1]$, und $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{PC}$ wenn wir ∞ mit dem Punkt $[1:0]$ identifizieren. Die vorher beschriebene Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ stimmt mit der Quotiententopologie überein.

Eine *reelle Quadrik* Q in $\mathbb{PC}$ ist die Nullstellenmenge einer (reellwertigen) hermiteschen Form auf $\mathbb{C}^2$ (welche wegen der Homogenität der Form eine Menge in $\mathbb{PC}$ definiert). Eine solche Quadrik ist also in homogenen Koordinaten $[z:w]$ durch eine Gleichung der Form

$$\begin{pmatrix}\bar{z} & \bar{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{a} & \bar{c}\\ \bar{b} & \bar{d}\end{pmatrix}$$

gegeben. Die Matrix ist nur bis auf reelle Skalare eindeutig definiert, und hat reelle Determinante; wir können uns also, falls wir eine eindeutige Beziehung zwischen Q und der sie definierenden Gleichung herstellen wollen, auf Matrizen beschränken, deren Determinante ± 1 ist. Wir werden in den Übungen zeigen, dass $Q \cap \mathbb{C}$ entweder ein Kreis oder eine Gerade ist, und umgekehrt jeder Kreis bzw. jede Gerade in $\mathbb{C}$ von einer Quadrik in $\mathbb{PC}$ kommt.

Eine lineare Transformation des $\mathbb{C}^2$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix}$$

induziert eine projektive Abbildung von $\mathbb{PC}$ auf sich selber, und zwei Matrizen liefern dieselbe projektive Abbildung auf $\mathbb{PC}$ genau dann, wenn sie sich durch eine multiplikative Konstante unterscheiden. Die induzierte projektive Abbildung auf $\mathbb{PC}$ ist genau dann nicht konstant, wenn die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist.

Die Einschränkung einer projektiven Abbildungen auf $\mathbb{C}$ ist die gebrochen lineare Abbildung

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

welche zwar nur für $z \neq -\delta/\gamma$ definiert ist, aber durch die Festsetzung des Wertes ∞ in diesem Punkt zu einer stetigen Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$ wird. Ähnlich kann man dem Punkt ∞ einen Wert zuweisen; das Arbeiten mit homogenen Koordinaten macht dies zu einer algebraischen Angelegenheit.

Wir werden uns in den Übungen überzeugen, dass projektive Abbildungen reelle Quadriken auf reelle Quadriken abbilden; insbesondere bilden gebrochen lineare Abbildungen Kreise und Geraden wieder auf Kreise und Geraden ab.

Eine Veranschaulichung der erweiterten Ebene ist die *Riemann'sche Zahlenkugel*. Dazu betrachten wir die komplexe Ebene als Teilraum von $\mathbb{R}^3$, i.e. $\mathbb{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 = 0\}$. Die Projektion vom Nordpol $N = (0, 0, 1)$ der Einheitskugel $S = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ identifiziert den Punkt $(x_1, x_2, x_3) \in S \setminus N$ mit $\frac{x_1 + \imath x_2}{1 - x_3} \in \mathbb{C}$. Wenn man N mit ∞ identifiziert, erhält man so $S = \hat{\mathbb{C}}$ (die Abbildung ist stetig mit stetiger Umkehrabbildung, wie wir in den Übungen zeigen werden).

2. Formale und konvergente Potenzreihen

Eine *formale Potenzreihe* um den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$A(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j (z - z_0)^j,$$

wo die $A_j \in \mathbb{C}$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen sind. Formal müssten wir $A(z)$ als diese Folge definieren, die bequeme Summenschreibweise hilft dabei, die algebraischen Operationen leicht anzuschreiben. Auch soll die Schreibweise $A(z)$ nicht bedeuten, dass wir für z Punkte aus $\mathbb{C}$ einsetzen dürfen–für eine formale Potenzreihe ist z einfach ein formaler Parameter, der bei der Summenschreibweise die Ordnung des zugehörigen Terms festhält. Eine Ausnahme bildet der Entwicklungspunkt z_0, indem man $A(z_0) = A_0$ festsetzt.

Die Menge aller formalen Potenzreihen mit Entwicklungspunkt z_0 wird mit $\mathbb{C}[[z - z_0]]$ bezeichnet. Sie bildet eine Algebra über $\mathbb{C}$ mit den Operationen der Addition

$$(A + B)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (A_j + B_j)(z - z_0)^j,$$

wo wir naheliegend $B(z) = \sum_j B_j (z - z_0)^j$ schreiben, und der Multiplikation

$$(AB)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k+\ell=j} A_k B_\ell \right) (z - z_0)^j.$$

Wir finden $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[[z - z_0]]$ als Menge der konstanten Potenzreihen, und die konstante Potenzreihe 1 ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist damit

$$(\lambda A)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda A_j (z - z_0)^j.$$

Man darf zwei formale Potenzreihen $A(z) \in \mathbb{C}[[z - z_0]]$ und $B(z) \in \mathbb{C}[[z - z_1]]$ zu $(A \circ B)(z) \in \mathbb{C}[[z - z_1]]$ zusammensetzen, falls $B(z_1) = z_0$. Die Zusammensetzung wird dann durch

$$(A \circ B)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j (B(z) - z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k (z - z_1)^k \right)^j$$

festgesetzt, und man erhält mit Hilfe des Multinomialsatzes

$$(A \circ B)(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\ell} A_j \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_\ell = j \\ k_1 + 2k_2 \cdots + \ell k_\ell = \ell}} \frac{j!}{k_1! \dots k_\ell!} B_1^{k_1} \dots B_\ell^{k_\ell} \right) (z - z_1)^\ell. \tag{1}$$

Die multiplikative Inverse einer formalen Potenzreihe $A(z) \in \mathbb{C}[[z - z_0]]$, also eine formale Potenzreihe $B(z)$ mit $(AB)(z) = 1$, ist genau dann definiert, wenn $A(z_0) \neq 0$. Dass diese Bedingung notwendig ist, folgt aus $A(z_0)B(z_0) = 1$. Um unter der Vorraussetzung $B(z)$ zu konstruieren, vergleicht man in der Gleichung $(AB)(z) = 1$ Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 1 &= A_0B_0 \\ 0 &= A_1B_0 + A_0B_1 \\ 0 &= A_2B_0 + A_1B_1 + A_0B_1 \\ &\vdots \\ 0 &= A_kB_0 + A_{k-1}B_1 + \cdots + A_0B_k, \end{aligned}$$

und sich überzeugt, dass die Koeffizienten B_j sich induktiv aus diesem Schema berechnen lassen. Man schreibt

$$B(z) = \frac{1}{A(z)}.$$

Ein Beispiel einer multiplikativen Inversen ist die geometrische Reihe,

$$G(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j.$$

Dieses können wir verwenden, um eine etwas greifbarere Formel für die multiplikative Inverse anzugeben. Da $(1-z)G(z) = 1$ ist, liegt es nahe, $A(z) = A_0(1-a(z))$ mit $a(0) = 0$ zu schreiben. Durch Substitution ist dann $A(z)G(a(z)) = A_0(1-a(z))G(a(z)) = A_0$, also

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{G(a(z))}{A_0}.$$

Ganz ähnlich kann man Inverse bezüglich der Zusammensetzung bilden. Hier suchen wir zu einer gegebenen formalen Potenzreihe $B(z) \in \mathbb{C}[[z-z_1]]$ mit $B(z_1) = z_0$ eine formale Potenzreihe $A(z) \in \mathbb{C}[[z-z_0]]$ mit $(A \circ B)(z) = z$ (wobei z auf der rechten Seite eine Kurzschreibweise für $z_1 + (z - z_1)$ ist). Es ist einfach nachzurechnen, dass die formale Potenzreihe z neutral bezüglich der Zusammensetzung formaler Potenzreihen ist.

Wenn $(A \circ B)(z) = z$ ist, so ist A eindeutig bestimmt und (wie wir sogleich sehen werden) auch $(B \circ A)(z) = z$ (aufgepasst: jetzt ist das $z = z_0 + (z - z_0)$, da wir in $\mathbb{C}[[z - z_0]]$ sind!). Wir schreiben $B(z) = A^{-1}(z)$ nennen B die Inverse von A bezüglich der Zusammensetzung. Um $B(z)$ zu berechnen, vergleichen wir Koeffizienten in der Gleichung $z = A \circ B(z)$ mit Hilfe der Entwicklung (1):

$$\begin{aligned} z_1 &= A_0 \\ 1 &= A_1B_1 \\ 0 &= A_1(B_2 + B_1^2) + A_2B_1^2 \\ &\vdots \\ 0 &= \sum_{j=1}^{\ell-1} A_j \left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_\ell=j \\ k_1+2k_2\cdots+\ell k_\ell=\ell}} \frac{j!}{k_1!\dots k_\ell!} B_1^{k_1} \dots B_\ell^{k_\ell} \right) + A_\ell B_1^\ell \end{aligned}$$

Die zweite Zeile dieses Schemas liefert die notwendige Bedingung $B_1 \neq 0$, und falls diese notwendige Bedingung erfüllt ist, liefert das iterative Schema eine eindeutige Lösung der Gleichung $z = A \circ B(z)$ (also die Folge der Koeffizienten A_j). Umgekehrt sehen wir mit Hilfe desselben Gleichungssystems, dass für gegebenes A mit $A_0 = z_1$ und $A_1 \neq 0$ die Koeffizientenfolge B_j eindeutig bestimmt ist. Somit können wir für ein gegebenes $A(z) \in \mathbb{C}[[z - z_0]]$ mit $A(z_0) = z_1$ sowohl ein $B(z) \in \mathbb{C}[[z - z_1]]$ bestimmen, welches $A \circ B(z) = z$ erfüllt, als auch ein $\tilde{B}(z) \in \mathbb{C}[[z - z_1]]$, welches $\tilde{B} \circ A(z) = z$ erfüllt. Es ergibt sich $\tilde{B}(z) = \tilde{B} \circ (A \circ B)(z) = (\tilde{B} \circ A) \circ B(z) = B(z)$, also ist die inverse Potenzreihe–wie oben behauptet–eindeutig bestimmt.

Eine alternative Bestimmung der inversen Potenzreihe $B(z)$ zu einer gegebenen formalen Potenzreihe $A(z)$ kann mit Hilfe eines weiteren iterativen Verfahrens erfolgen. Dazu nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $A(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ die Bedingungen $A(0) = 0$ und $A_1 = 1$ erfüllt (der allgemeine Fall kann auf diesen reduziert werden), und schreiben $A(z) = z + a(z)$, wo $a(z)$ nur Terme der Ordnung 2 und höher enthält. Wir definieren $B_1(z) = z$, und iterativ $B_j(z) = z - a(B_{j-1}(z))$; dann konvergiert $B_j(z)$ für $j \to \infty$ gegen $A^{-1}(z)$ (wir werden dies in den Übungen zeigen). Die zugrundeliegende Topologie ist hier jene, welche von der Metrik

$$d(A(z), B(z)) = 2^{-k}, \quad \text{wenn } A_j = B_j \text{ für } j \leq k, \quad A_{k+1} \neq B_{k+1}$$

erzeugt wird.

Eine formale Potenzreihe $A(z) \in \mathbb{C}[[z - z_0]]$ ist *konvergent*, wenn es einen Punkt $z_1 \neq z_0$ gibt, sodass die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j (z_1 - z_0)^j$$

konvergiert, also der Grenzwert

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} A_j (z_1 - z_0)^j$$

existiert. Der Grenzwert wird dann mit $A(z_1)$ bezeichnet, und wir sagen auch, dass $A(z_1)$ konvergiert; damit ist $A(z_0)$ konvergent für jedes $A \in \mathbb{C}[[z - z_0]]$. Wenn A konvergent ist, so definieren wir den *Konvergenzradius* $R(A)$ von A als

$$R(A) = \sup\{|z_1 - z_0| \colon A(z_1) \text{ konvergiert}\},$$

wobei wir verabreden, dass $R(A) = \infty$, falls die das Supremum definierende Menge nicht nach oben beschränkt ist. Die Menge der konvergenten Potenzreihen wird mit $\mathbb{C}\{z - z_0\}$ bezeichnet.

Lemma 1. *Die Potenzreihe $A \in \mathbb{C}\{z - z_0\}$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $D_{R(A)}(z_0)$ gegen eine stetige Funktion, welche wir wiederum mit $z \mapsto A(z)$ bezeichnen.*

Wir bemerken gleich, dass dies eine momentan noch nicht gerechtfertigte Vereinfachung unserer Notation darstellt–wir wissen (noch) nicht, dass wir die durch unsere konvergente Potenzreihe auf ihrem Konvergenzbereich dargestellte Funktion mit dem formalen algebraischen Objekt identifizieren dürfen. Dass dies tatsächlich so ist, werden wir erst später erfahren, und im Moment müssen wir uns damit begnügen, aus dem Zusammenhang abzulesen, welche Bedeutung das Symbol $A(z)$ nun erhält.

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $z_0 = 0$. Wenn $K \subset D_{R(A)}(0)$ kompakt ist, so gibt es ein $w \in D_{R(A)}(0)$ für welches $A(w)$ konvergiert und mit

$$\max_{z \in K} \frac{|z|}{|w|} \leq q < 1.$$

Da $A(w)$ konvergiert, gibt es ein $M > 0$ mit $|A_j w^j| \leq M$. Damit erweist sich die geometrische Reihe $\sum_j M q^j$ als für $z \in K$ gleichmäßige Majorante für $A(z)$:

$$|A_j z^j| \leq |A_j w^j| \frac{|z|^j}{|w|^j} \leq M q^j.$$

□

Die Berechnung des Konvergenzradius erfolgt bequem mit Hilfe der Formel von Cauchy-Hadamard oder des Quotientenkriteriums.

Lemma 2 (Formel von Cauchy-Hadamard). *Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_j A_j (z - z_0)^j$ ist durch*

$$R(A) = \frac{1}{\limsup_{j \to \infty} \sqrt[j]{|A_j|}}$$

gegeben.

Lemma 3. *Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_j A_j (z - z_0)^j$, wobei $A_j \neq 0$ für genügend grosse j, ist durch*

$$\frac{1}{R(A)} = \lim_{j \to \infty} \frac{|A_{j+1}|}{|A_j|}$$

gegeben, falls der Grenzwert existiert.

Beispiel 1. Die Exponentialreihe

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

ist auf ganz $\mathbb{C}$ konvergent und erfüllt $e^{z+w} = e^z e^w$ (Übungen).

3. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie

Eine Abbildung $f : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ kann auch als Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. Wir werden zunächst das Zusammenspiel der komplexen Struktur auf $\mathbb{R}^2$ mit der zugrundelegenden reellen Struktur ausnutzen, um ein entsprechendes Differentialkalkül zu entwickeln.

Die Ableitung einer im Punkt $z_0 = (x_0 + \imath y_0)$ reell differenzierbaren Funktion $f = u + iv : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ ist durch eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion $df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben, welche wir mit der Matrix der partiellen Ableitungen identifizieren:

$$df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben wie in Unterabschnitt 1.6

$$df(x_0, y_0)(w) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)w + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\bar{w} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)d\bar{z} \right)(w),$$

wobei wir die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

verwendet haben; diese erfüllen die Produktregeln

$$\frac{\partial fg}{\partial z} = f\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}g, \quad \frac{\partial fg}{\partial \bar{z}} = f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g,$$

sowie die Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial f \circ g}{\partial z} &= \left(\frac{\partial f}{\partial w} \circ g \right) \frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \circ g \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \\ \frac{\partial f \circ g}{\partial \bar{z}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial w} \circ g \right) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \circ g \right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}, \end{aligned}$$

wie wir in den Übungen zeigen werden. Wir sagen, die reell differenzierbare Funktion f ist im Punkt z_0 komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert, nennen den Grenzwert die Ableitung von f im Punkt z_0 und schreiben dafür $f'(z_0)$.

Lemma 4. *Sei f in einer Umgebung von $z_0 = x_0 + \imath y_0 \in \mathbb{C}$ definiert und im Punkt z_0 reell differenzierbar. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) f ist im Punkt z_0 komplex differenzierbar;
(2) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$;
(3) $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ und $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$;
(4) $df(x_0, y_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear und durch Multiplikation mit $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ gegeben.

Beweis. Wenn f im Punkt z_0 differenzierbar sind, so können wir

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + R(z - z_0)$$

schreiben, wo $\lim_{z \to z_0} \frac{R(z-z_0)}{z-z_0} = 0$. Also ist das reelle Differential von f durch komplexe Multiplikation mit $f'(z_0)$ gegeben; die anderen Eigenschaften sind einfache Umformulierungen.

Ist auf der anderen Seite das reelle Differential von f im Punkt z_0 komplex linear, so ist f komplex differenzierbar im Punkt z_0. $\square$

Definition 1. Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ ist holomorph auf der offenen Menge Ω, wenn f in jedem Punkt von Ω komplex differenzierbar ist. Die Menge der auf Ω holomorphen Funktionen wird mit $\mathcal{H}(\Omega)$ bezeichnet. Eine holomorphe Funktion definiert durch $z \mapsto f'(z)$ eine Funktion auf Ω, welche als Ableitung von f bezeichnet wird.

Bemerkung 1. Wir bemerken nochmals, dass für eine im Punkt z_0 komplex differenzierbare Funktion f die Gleichung

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

erfüllt ist.

4. Das Kurvenintegral

Satz 1. *Sei $f \in \mathcal{H}(\dot{D}_r(z_0)) \cap C(D_r(z_0))$ und $D_r(z_0) \subset \Omega$. Dann gibt es eine Funktion $F \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$ mit $F' = f$.*

Beweis. Wir definieren

$$F(z) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\, dt.$$

Um zu sehen, dass $F \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$, berechnen wir

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\, dt = 0,$$

wobei wir den Satz über die Differentiation von Parameterintegralen anwenden. Auf der anderen Seite haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial z}(z) &= \int_0^1 t\frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\, dt + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt \\
&= \int_0^1 t\frac{d}{dt} f(z_0 + t(z - z_0))\, dt + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt \\
&= tf(z_0 + t(z - z_0))\Big|_0^1 - \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

□

Die Konstruktion, welche wir im Beweis des vorangehenden Satzes angewendet haben, ist das *Kurvenintegral* der Funktion f. Allgemeiner definieren wir für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ und eine Funktion f, welche in einer Umgebung von $\gamma^* = \{\gamma(t)\colon t \in [0, 1]\}$ definiert und stetig ist, das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Hierbei ist das Integral einer komplexwertigen Funktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ deren Real- und Imaginärteil integrierbar sind durch die getrennte Integration des Real- und Imaginärteiles dieser Funktion erklärt, also

$$\int_a^b \varphi(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t)\, dt + \imath \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t)\, dt.$$

Einfache Eigenschaften dieser Definition werden wir in den Übungen besprechen.

Ähnlich definieren wir für eine stückweise differenzierbare Kurve das Kurvenintegral durch die Summe über Teilintervalle $[t_j, t_{j+1}] \subset [0, 1]$ (wo $t_0 = 0$ und $t_n = 1$), auf denen $\gamma'(t)$ existiert, definieren, also

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und

$$\frac{\partial F \circ \gamma}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \circ \gamma\right) \gamma' + \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \circ \gamma\right) \bar{\gamma}'$$

zeigt nun:

Satz 2. *Sei $f\colon \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ stetig auf Ω, und γ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Wenn f eine Stammfunktion $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ besitzt, so ist*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Die lokale Existenz einer Stammfunktion, welche in Satz 1 bewiesen wurde sowie die Formel für das Kurvenintegral in Satz 2 erlaubt es uns, zu beweisen, dass das Kurvenintegral nur von der Homotopieklasse von γ abhängt.

Definition 2. Seien γ_0 und γ_1 stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$. Eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 in Ω ist eine stetig differenzierbare Abbildung $H\colon [0,1]^2 \to \Omega$ mit $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$, $H(s,0) = p$, $H(s,1) = q$. Zwei Kurven heißen homotop in Ω, wenn es eine Homotopie zwischen ihnen in Ω gibt. Eine geschlossene Kurve (i.e. $\gamma(0) = \gamma(1) = p$) ist in Ω nullhomotop, wenn es eine Homotopie zwischen ihr und der konstanten Kurve p in Ω gibt. Ω ist einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in Ω nullhomotop ist.

Satz 3. *Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap C(\Omega)$. Wenn γ_0 und γ_1 homotope Kurven von p nach q sind, so ist*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Insbesondere gilt für eine in Ω nullhomotope Kurve γ

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Wir setzen $\gamma_s(t) = H(s,t)$, wo H eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 in Ω ist, und definieren

$$I_s = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz.$$

Wir wollen zeigen, dass $I_0 = I_1$. Dazu definieren wir $E = \{s \in [0,1]\colon I_s = I_0\}$; E ist nicht leer, und abgeschlossen nach dem Satz über stetige Parameterintegrale. Wir zeigen nun, dass E auch offen ist.

Sei also $s_0 \in E$. Wir überdecken die Kurve γ_{s_0} mit endlich vielen Kreisen $D_{r_j}(w_j) \subset \Omega$ dergestalt, dass es Punkte $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ gibt, für die $\gamma_{s_0}([t_j, t_{j+1}]) \subset D_{r_j}(w_j)$ und $\gamma_{s_0}(t_j) \in D_{r_j}(w_j) \cap D_{r_{j+1}}(w_{j+1})$ ist. Dabei können wir annehmen, dass z_0 entweder in keinem der Kreise enthalten ist, oder aber, dass z_0 ein Mittelpunkt eines dieser Kreise ist, sodass wir durch eine Anwendung von Satz 1 in jedem der Kreise $D_{r_j}(w_j)$ eine Stammfunktion F_j zu f finden können. Wir bestimmen diese Stammfunktionen so, dass $F_j(\gamma_{s_0}(t_j)) = F_{j+1}(\gamma_{s_0}(t_j))$ gilt, also $F_j - F_{j+1}$ in $D_{r_j}(w_j) \cap D_{r_{j+1}}(w_{j+1})$ verschwindet.

Wir wählen ε so klein, dass $\gamma_s(t_j) \in D_{r_j}(w_j) \cap D_{r_{j+1}}(w_{j+1})$ für $|s - s_0| < \varepsilon$ gilt. Damit erhalten wir für diese s, dass

$$I_s = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz = \sum_j \left(F_j(\gamma_s(t_{j+1})) - F_j(\gamma_s(t_j))\right) = F_n(q) - F_0(p) = I_{s_0}.$$

□

5. Die Cauchy'sche Integralformel

Wir können nun die erste Version des Cauchy'schen Integralsatzes beweisen. Um diese zu formulieren, definieren wir die Windungszahl $\operatorname{Ind}_z(\gamma)$ einer geschlossenen Kurve γ bezüglich eines Punktes $z \notin \gamma^*$ als

$$\operatorname{Ind}_z(\gamma) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

VIELLEICHT:

Lemma 5. *Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$, $z \notin \gamma^*$. Dann ist γ homotop (in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$) zu*

$$t \mapsto e^{2\pi\imath n t} + z,$$

also einer n-mal durchlaufenen Kreislinie um z, wo $n = \operatorname{Ind}_z(\gamma)$.

Satz 4. *Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und γ eine in Ω nullhomotope geschlossene Kurve. Dann gilt für $z \in \Omega \setminus \gamma^*$*

$$\mathrm{Ind}_z(\gamma) f(z) = \frac{1}{2\pi \imath} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Beweis. Die Funktion

$$h(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

ist auf Ω definiert, holomorph auf $\Omega \setminus \{z\}$, und stetig auf Ω, wenn wir $h(z) = f'(z)$ setzen. Damit können wir Satz 3 anwenden, um zu sehen, dass

$$\int_\gamma h(\zeta)\, d\zeta = 0$$

ist. Umformuliert ist das genau die Behauptung des Satzes. □

Wir werden nun einige Folgerungen aus der Integraldarstellung des Cauchy'schen Satzes ziehen. Zunächst bemerken wir, dass jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ glatt (also unendlich oft differenzierbar) im reellen Sinn ist. Dies folgt, indem wir für einen beliebigen Punkt $z_0 \in \Omega$ ein $r > 0$ mit $\bar{D}_r(z_0)$ wählen. Der Cauchy'sche Integralsatz kann für beliebiges $z \in D_r(z_0)$ und $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi \imath t}$ angewendet werden, und gibt so

$$f(z) = \int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{2\pi \imath t}) re^{2\pi \imath t}}{z_0 + re^{2\pi \imath t} - z}\, dt.$$

Der Integrand besitzt offensichtlich für $z \in D_{r/2}(z_0)$ stetige partielle Ableitungen jeder Ordnung (in reellen Koordinaten (x, y)), und wir können den Satz über Differenzierbarkeit von Parameterintegralen anwenden um zu sehen, dass f in $D_{r/2}(z_0)$ stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt.

Wir dürfen also induktiv die k-te Ableitung für $k \in \mathbb{N}$ einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ definieren.

Tatsächlich gilt eine wesentlich stärkere Aussage als die reelle Differenzierbarkeit: Die gleichmäßige Konvergenz einer Folge holomorpher Funktionen auf kompakten Teilmengen von Ω zieht schon die gleichmäßige Konvergenz all ihrer Ableitungen nach sich.

Satz 5 (Der Weierstrass'sche Konvergenzsatz). *Sei $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ eine Folge holomorpher Funktionen, welche gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen eine (stetige) Grenzfunktion f konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f_n^{(k)}$ gegen $f^{(k)}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω konvergiert.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sei also $z_0 \in \Omega$, und $r > 0$ so gewählt, dass $\bar{D}_r(z_0) \subset \Omega$. Wir können dann mit $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi \imath t}$ für $z \in D_{r/2}(z_0)$

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi \imath} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi \imath} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

schreiben (der Integrand konvergiert gleichmäßig, da der Nenner gleichmäßig beschränkt bleibt). Es folgt (da der Integrand wie oben ausgeführt stetige partielle Ableitungen jeder Ordnung besitzt), dass

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2\pi \imath} \int_\gamma \left.\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right|_{z=z_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

also ist f komplex differenzierbar in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$.

Weiters gilt, dass

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2\pi \imath} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi \imath} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi \imath} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n}{\partial z}(z),$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig auf $\bar{D}_{r/2}(z_0)$ ist.

Ist nun $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Teilmenge ist, so wählen wir für jedes $z_0 \in K$ ein solches $r(z_0) > 0$ und überdecken K durch die Kreise $D_{r(z_0)/2}(z_0)$. Da K kompakt ist, können wir es schon durch endlich viele solche Kreise überdecken. Da nach dem letzten Absatz f_n' gleichmäßig auf jedem dieser endlich vielen Kreise gegen f' konvergiert, konvergiert f_n' gleichmäßig auf K gegen f'. □

Wir bemerken insbesondere, dass dieser Satz impliziert, dass eine auf kompakten Teilmengen ihren Konvergenzkreisen nach Lemma 1 gleichmäßig konvergente Potenzreihe $A \in \mathbb{C}\{z - z_0\}$ also eine holomorphe Funktion auf $D_{R(A)}(z_0)$ darstellt. Damit ist sie dort auch glatt, und wir erhalten auch, dass konvergente Potenzreihen gliedweise abgeleitet (und damit auch integriert) werden dürfen.

Wir dürfen nun auch die Cauchy'sche Formel für Ableitungen formulieren, deren Beweis wir eigentlich schon im Beweis von Satz 5 durchgeführt haben.

Satz 6. *Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und γ eine in Ω nullhomotope geschlossene Kurve. Dann gilt für $z \in \Omega \setminus \gamma^*$*

$$\mathrm{Ind}_z(\gamma) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\imath} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Wir heben einen Spezialfall nochmals heraus:

Korollar 1. *Sei $f \in \mathcal{H}(D_R(z_0))$, dann gilt für $r < R$*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\imath\vartheta}) e^{-\imath k\vartheta}\, d\vartheta.$$

Insbesondere gilt die Mittelwerteigenschaft

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\imath\vartheta})\, d\vartheta.$$

Diese Integralformel führt zu strikten Wachstumsbedingungen an die Ableitungen einer holomorphen Funktion. Für eine abgeschlossene Menge E definieren wir $d(z, E) = \min_{w \in E} |w - z|$; für eine kompakte Menge K schreiben wir

$$\|f\|_K = \max_{z \in K} |f(z)|, \quad f \in C(K).$$

Satz 7 (Die Cauchyabschätzungen). *Wenn $\Omega \subset \mathbb{C}$ beschränkt und $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ist, so ist für $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung*

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!\, \|f\|_{\bar{\Omega}}}{d(z, b\Omega)^k}$$

erfüllt.

Beweis. Sei $z_0 \in \Omega$. Dann ist mit $R = d(z_0, b\Omega)$ der Kreis $D_R(z_0) \subset \Omega$, und wir können Korollar 1 gemeinsam mit der Dreiecksungleichung anwenden:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \left| \frac{k!}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\imath\vartheta}) e^{-\imath k\vartheta}\, d\vartheta \right| \leq \frac{k!\, \|f\|_{\bar{\Omega}}}{r^k},$$

also mit $r \to R$ die Behauptung des Satzes. □

Eine Folgerung aus den Cauchyabschätzungen ist, dass es keine nichtkonstanten *ganzen Funktionen* (das sind solche, welche auf $\mathbb{C}$ holomorph sind) gibt.

Satz 8 (Satz von Liouville). *Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Wenn f beschränkt ist, so ist f konstant.*

Beweis. Seien $r < R$ beliebig, dann ist mit einer oberen Schranke C für $|f|$ nach Satz 7

$$|f'(z)| \leq \frac{C}{R}$$

für jedes $z \in D_r(z_0)$. Mit $R \to \infty$ folgt, dass $f'(z) = 0$ für jedes solche z, da aber r beliebig war, ist $f' = 0$, und damit f konstant auf $\mathbb{C}$. □

Wir können nun zeigen, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Satz 9 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ nicht konstant, dann gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$.*

Beweis. Angenommen, $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist $\frac{1}{p(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion. Wir schreiben ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$p(z) = z^k + \sum_{j<k} p_j z^j = z^k + \hat{p}(z).$$

Da $\lim_{z\to\infty} \frac{|\hat{p}(z)|}{|z|^k} = 0$, gibt es ein $r > 0$ sodass $|\hat{p}(z)| \leq \frac{1}{2}|z|^k$ für $|z| > r$ gilt. Für solche z ist also $|p(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^k$, womit sich $1/p(z)$ als beschränkt herausstellt. Nach dem Satz von Liouville ist $1/p(z)$ also konstant, ein Widerspruch. □

6. Die Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen

Eine der wichtigsten Folgerungen aus dem Cauchy'schen Integralsatz haben wir noch vor uns: Sie zeigt, dass nicht nur jede Potenzreihe holomorph auf ihrem Konvergenzkreis ist, sondern dass jede holomorphe Funktion sich lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lässt.

Wir betrachten dazu den *Cauchykern* $(\zeta - z)^{-1}$ und verwenden die geometrische Summe, um zu sehen, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{j\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^j \\ &= \sum_{j\geq 0}\frac{(z-z_0)^j}{(\zeta-z_0)^{j+1}}\end{aligned}$$

ist, wenn $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$, und zwar gleichmäßig in ζ. Es folgt damit, dass für $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, und $z \in D_r(z_0)$ mit $r < d(z_0, b\Omega)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{j\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}\,d\zeta\right)(z-z_0)^j = \sum_j \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j,$$

wobei wir $\gamma(\vartheta) = z_0 + re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$ gesetzt haben. Zusammen mit den schon bewiesenen Sätzen über konvergente Potenzreihen ergibt sich damit:

Satz 10. *Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $r = d(z_0, b\Omega)$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{j\geq 0}\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j$$

für $z \in D_r(z_0)$, wobei die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Teilmengen dieses Kreises ist.

Auch aus der Potenzreihendarstellung wollen wir noch einige Informationen über das Verhalten holomorpher Funktionen ableiten. Wir wissen schon, dass Funktionen, welche holomorph in einer punktierten Kreisscheibe sind und sich stetig in den Mittelpunkt fortsetzen lassen, holomorph auf der ganzen Keisscheibe ist (Satz 2). Für diese Folgerung genügt es sogar, nur Beschränktheit vorrauszusetzen:

Satz 11 (Hebbare Singularitäten). *Sei $f \in \mathcal{H}((\dot{D}_r z_0))$ beschränkt. Dann gibt es ein $\tilde{f} \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$ mit $\tilde{f}|_{D_r(z_0)} = f$.*

Beweis. Da f beschränkt ist, ist die Funktion

$$g(z) = \begin{cases}(z-z_0)f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0\end{cases}$$

auf $D_r(z_0)$ holomorph (zu überprüfen ist nur die komplexe Differenzierbarkeit in z_0). Also können wir mit Hilfe der Potenzreihendarstellung $g(z) = (z - z_0)\tilde{f}(z)$ schreiben. □

Unsere nächste Folgerung ist, dass holomorphe Funktionen auf einer Kreisscheibe durch lokalisierte Daten vollständig gegeben sind:

Lemma 6. *Sei $f \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$, und $z_j \in D_r(z_0)$ eine Folge von Punkten mit $z_j \to z_0$, $j \to \infty$, für die $f(z_j) = 0$ ist. Dann ist $f(z) = 0$, $z \in D_r(z_0)$.*

Beweis. Offensichtlich ist $f(z_0) = 0$. Wenn $f(z)$ nicht konstant 0 ist, so können wir unter Verwendung der Potenzreihendarstellung $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$ für ein $\varphi \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$ mit $\varphi(z_0) \neq 0$ schreiben. Also hat f in einer Umgebung von z_0 keine Nullstellen außer z_0. □

Um globale Informationen aus lokalen Daten auf einer beliebigen offenen Menge Ω zu erhalten, ist es offensichtlich notwendig, dass Ω nicht in voneinander unabhängige Teile zerfällt; dazu benötigen wir den Begriff des Zusammenhangs. Es gibt hier zwei Zugänge, welche in $\mathbb{C}$ übereinstimmen.

Definition 3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, dann heisst Ω zusammenhängend (und wir sagen, Ω ist ein Gebiet), wenn sich Ω nicht in nichttriviale offene Teile aufspalten lässt, also aus $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ folgt und $\Omega_1 \neq \emptyset$ schon $\Omega_1 = \Omega$ folgt.

Definition 4. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, dann heisst Ω wegzusammenhängend, wenn sich zwei beliebige Punkte $p, q \in \Omega$ durch eine stetige Kurve γ mit $\gamma^* \subset \Omega$ verbinden lassen.

Jede offene Menge lässt sich eindeutig als paarweise disjunkte Vereinigung von Gebieten schreiben.

Lemma 7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist Ω zusammenhängend genau dann, wenn Ω wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Sei zunächst Ω zusammenhängend, $p \in \Omega$. $\Omega_1 \subset \Omega$ bestehe aus jenen Punkten $q \in \Omega$, welche sich mit p durch eine stetige Kurve verbinden lassen; $\Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1$. Da $p \in \Omega_1$, ist $\Omega_1 \neq \emptyset$, und da Ω offen ist, ist sowohl Ω_1 als auch Ω_2 offen (mit $q \in \Omega_1$ ist offensichtlich auch jedes $q' \in D_r(q) \subset \Omega$ wiederum in Ω_1, und ähnliches gilt für $q \in \Omega_2$, da sich jeder Punkt in einer Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt derselben verbinden lässt). Also ist $\Omega = \Omega_1$ und damit Ω wegzusammenhängend.

Ist auf der anderen Seite $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, so sei $p \in \Omega_1$ und $q \in \Omega_2$. Wenn Ω wegzusammenhängend wäre, so gäbe es einen stetigen Weg $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Es ist dann $[0,1] = \gamma^{-1}(\Omega_1) \cup \gamma^{-1}(\Omega_2)$, ein Widerspruch da diese Mengen nicht leer und offen sind (schliesslich ist $[0,1]$ zusammenhängend). □

Satz 12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wenn $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ auf einer Menge mit einem Häufungspunkt in Ω verschwindet, so verschwindet f in ganz Ω.*

Beweis. Sei N die Menge der Punkte $p \in \Omega$, für welche eine Umgebung $D_r(p) \subset \Omega$ existiert auf der f verschwindet. N ist definitionsgemäß offen, und nach Vorraussetzung und Lemma 6 ist $N \neq 0$.

N ist aber auch abeschlossen in Ω: Wenn $p \in \Omega$ ein Häufungspunkt von N ist, so ist wiederum nach Lemma 6 auch $p \in N$. Da Ω zusammenhängend ist, folgt $N = \Omega$. □

Wenn eine holomorphe Funktion ein Betragsmaximum an einem inneren Punkt eines Gebiets annimmt, so muss sie schon konstant sein:

Satz 13 (Maximumsprinzip). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Wenn es einen Punkt $z_0 \in \Omega$ mit $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für $z \in D_r(z_0)$ gibt, wo $r > 0$, so ist $f(z) = f(z_0)$ konstant auf Ω.*

Beweis. Wir verwenden die Mittelwerteigenschaft Korollar 1, nach der

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\imath\vartheta})\, d\vartheta$$

ist. Eine Anwendung der Dreiecksungleichung liefert uns nun

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\imath\vartheta})\, d\vartheta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{\imath\vartheta})|\, d\vartheta \leq |f(z_0)|,$$

da nach Vorraussetzung $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für z nahe bei z_0 ist. Also gilt Gleichheit in der obigen Ungleichungskette, und damit

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{\imath\vartheta})|\, d\vartheta = 0;$$

da der Integrand eine stetige nichtnegative Funktion ist, folgt $|f(z)| = |f(z_0)|$ für z nahe bei z_0. Nach einer Übungsaufgabe folgt nun, dass $f(z) = f(z_0)$ konstant in einer Umgebung von z_0 ist, und da Ω ein Gebiet ist, mit Hilfe von Satz 12 $f(z) = f(z_0)$ für $z \in \Omega$. □

Korollar 2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Wenn $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ist, so nimmt $|f|$ sein Maximum am Rand $b\Omega$ an.*

7. Die Homologieversion des Cauchy'schen Integralsatzes

Oft ist es von Vorteil, nicht nur geschlossene Kurven zu betrachten, sondern "endliche Summen" von geschlossenen Kurven. Diese werden als 1-Zykel bezeichnet; genauer gesagt ist ein 1-Zykel in Ω ein Element der freien abelschen Gruppe $Z_1(\Omega)$ welche von den stetigen Abbildungen $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ erzeugt wird. Nicht alle solchen Zykel beranden ein Gebiet in Ω; die Frage, was genau sie beranden, führt uns zur Homologie.

Sei $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ die Einheitskreisscheibe. Unter einem 2-Zykel in Ω verstehen wir ein Element der von den stetigen Abbildungen $f\colon \Delta \to \Omega$ erzeugten freien abelschen Gruppe $Z_2(\Omega)$. Wir definieren eine Randabbildung $\partial\colon Z_2 \to Z_1$ mittels $(\partial f)(t) = f(e^{2\pi i t})$. Zwei 1-Zykel in Ω sind homolog, wenn ihre Differenz nullhomolog ist, also ein Rand ist (die Quotientengruppe $Z_1/(\partial Z_2)$ ist die Homologiegruppe von Ω). Wir werden allerdings die folgende Definition wählen, welche nullhomologe 1-Zykel durch ihre *Windungszahl* auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$ definiert.

Definition 5. Sei $\Gamma = n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k \in Z_1$. Dann ist die Windungszahl von Γ bezüglich $p \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ (d.h. p ausserhalb der Vereinigung der Bilder von γ_j) die ganze Zahl

$$\operatorname{Ind}_p \Gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - p} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^k n_j \int_0^1 \frac{\dot\gamma_j(t)}{\gamma_j(t) - p}.$$

Ein 1-Zykel Γ in Ω ist nullhomolog in Ω, wenn für alle $p \notin \Omega$ $\operatorname{Ind}_p \Gamma = 0$ gilt. Für f stetig nahe dem Bild Γ^* von Γ definieren wir

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = \sum_j n_j \int_{\gamma_j} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Satz 14. *Sei Γ ein 1-Zykel in Ω welcher stückweise stetig differenzierbar ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *Γ ist nullhomolog in Ω.*

ii) *Für jede holomorphe Funktion f in Ω gilt*

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

iii) *Für jedes $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ gilt*

$$(\operatorname{Ind}_z \Gamma)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral einer holomorphen Funktion über zwei homologe Zykel gleich: Wenn Γ_1 und Γ_2 in Ω homolog sind, dann gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\Gamma_2} f(\zeta)\, d\zeta.$$

8. Isolierte Singularitäten und meromorphe Funktionen

Eine holomorphe Funktion f hat eine isolierte Singularität an einem Punkt $p \in \mathbb{C}$ wenn es eine Kreisscheibe $D_r(p)$ um p gibt sodass f holomorph auf $D_r(p) \setminus \{p\}$ ist. Wir benötigen die folgende Klassifikation von isolierten Singularitäten:

SATZ 15. *Sei f eine holomorphe Funktion auf $D_r(p) \setminus \{p\}$. Dann gilt eine (und nur eine) der folgenden Aussagen:*
i) *Für jedes kleine $r > \varepsilon > 0$ ist $f(\dot{D}_\varepsilon(p))$ dicht in $\mathbb{C}$.*
ii) *Es existiert ein $k \geq 0$ sodaß $(z-p)^k f(z)$ sich zu einer holomorphen Funktion auf $D_r(p)$ fortsetzen lässt.*

In dem Beweis des Satzes benötigen wir das folgende Lemma über "hebbare" Singularitäten.

LEMMA 8. *Sei f eine beschränkte holomorphe Funktion auf $D_r(p) \setminus \{p\}$. Dann gibt es eine holomorphe Fortsetzung von f auf $D_r(p)$, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion F mit $F(z) = f(z)$ für $z \neq p$.*

BEWEIS. Zunächst nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $p = 0$ ist. Sei $0 < \varepsilon < S < R < r$, und $M > 0$ so gewählt, dass $|f(z)| \leq M$ für $0 < |z| < R$ gilt . Nach Satz 14 gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \varepsilon < |z| < R.$$

Wir behaupten, dass das zweite Integral für $|z| > S$ gegen 0 konvergiert, wenn wir $\varepsilon \to 0$ streben lassen:

$$\left| \int_{bD_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{M\varepsilon}{S - \varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Wir haben deswegen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

zunächst für $S < |z| < R$ für ein fixes $S > 0$, und damit für $0 < |z| < R$. Die Fortsetzung F von f wird durch das Integral auf der rechten Seite der Gleichung definiert. $\square$

BEWEIS VON SATZ 15. Wir nehmen an, dass i) nicht erfüllt ist, und zeigen, dass dann ii) gilt; wie zuvor nehmen wir an, dass $p = 0$ ist. Wenn i) nicht gilt, gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $s > 0$ sodass $|f(z) - w| > s$ für alle z mit $0 < |z| < r$ gilt. Die Funktion $1/(f(z) - w)$ ist damit eine holomorphe Funktion auf $D_r(0) \setminus \{0\}$, die holomorph und beschränkt ist.

Nach Lemma 8 gibt es eine holomorphe Fortsetzung F von f auf $D_r(0)$. Wir können demnach $F(z) = z^k g(z)$ mit $g(0) \neq 0$ schreiben. Das bedeutet, dass $f(z) = w + 1/F(z) = z^{-k}(wz^k + g(z)^{-1})$, und $z^k f(z)$ ist damit holomorph in einer Umgebung von 0. $\square$

Definition 6. Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann ist p eine essentielle Singularität von f wenn i) in Satz 15 gilt, und ein Pol der Ordnung k wenn ii) in Satz 15 gilt.

Bemerkung 2. Ein Pol der Ordnung 0 ist damit eine hebbare Singularität.

Eine Möglichkeit, Pole zu erkennen, ist das Wachstumsverhalten der Funktion an einer isolierten Singularität zu betrachten.

LEMMA 9. *Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann ist p ein Pol der Ordnung k genau dann, wenn $\lim_{z\to p} |z^{k-1} f(z)| = \infty$ und $\lim_{z\to p} z^k f(z) \in \mathbb{C}$ existiert. Insbesondere ist p ein Pol positiver Ordnung genau dann, wenn $\lim_{z\to p} |f(z)| = \infty$ gilt, und eine hebbare Singularität, wenn $\lim_{z\to p} |f(z)|$ existiert und endlich ist.*

Beispiel 2. Die Funktion $e^{-1/z}$ hat eine essentielle Singularität an der Stelle 0, da

$$\lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0+} e^{-1/t} = 0, \quad \lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0+} |e^{-1/(it)}| = 1,$$

und damit $\lim_{z\to 0} |e^{-1/z}|$ nicht existiert.

Definition 7. f ist eine meromorphe Funktion auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ wenn es eine diskrete Menge von Punkten $p_j \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$, gibt, sodass f auf $\Omega \setminus \{p_j : j \in \mathbb{N}\}$ ist und f an jedem p_j höchstens einen Pol besitzt. Die Menge aller meromorphen Funktionen auf Ω wird mit $\mathcal{M}(\Omega)$ bezeichnet.

9. Die Laurententwicklung und das Residuum

Eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle p lässt sich dort in eine Laurentreihe entwickeln.

Definition 8. Eine (formale) Laurentreihe um $p \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j (z-p)^j.$$

Die Summe $\sum_{j<0} a_j(z-p)^j$ ist der Hauptteil der Laurentreihe an der Stelle p.

Wir betrachten zunächst die Laurentreihenentwicklung einer holomorphen Funktion an einer isolierten Singularität.

Lemma 10. *Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $R > 0$ und eindeutig bestimmte $a_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft dass*

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j (z-p)^j, \quad 0 < |z-p| < R,$$

wobei die Summe gleichmässig auf kompakten Teilmengen von $0 < |z-p| < R$ konvergiert. Die a_j erfüllen folgende Abschätzung: für jedes r mit $0 < r < R$ gibt es ein $M = M_r$, sodass $|a_j| \leq \frac{M}{r^j}$ ist.

Beweis. Wie üblich nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $p = 0$ ist; wir nehmen an, dass f auf einer Scheibe mit dem Radius R um 0 definiert ist. Wir schreiben zunächst formal

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z}{\zeta}} = f(\zeta) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}},$$

und analog

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -f(\zeta) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\zeta^j}{z^{j+1}},$$

wobei die erste Summe auf kompakten Teilmengen von $|z| < |\zeta|$ und die zweite Summe auf kompakten Teilmengen von $|\zeta| < z$ gleichmässig konvergiert.

Für fixe $0 < \varepsilon < s < R$ und z mit $\varepsilon < |z| < s$ können wir nach Satz 14

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_s(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_\varepsilon(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

schreiben. Wir benützen nun die obigen Reihenentwicklungen für die Integranden und erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j \geq 0} \left(\int_{bD_s(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}\, d\zeta \right) z^j + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j \geq 0} \left(\int_{bD_\varepsilon(0)} f(\zeta)\zeta^j\, d\zeta \right) \frac{1}{z^{j+1}} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{bD_\varepsilon(0)} f(\zeta)\zeta^{-j-1}\, d\zeta \right) z^j, \end{aligned}$$

wobei wir das Integral über $bD_s(0)$ durch das Integral über $bD_\varepsilon(0)$ ersetzt haben (warum ist das möglich?). Die Koeffizienten in der Laurententwicklung sind daher durch

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_\varepsilon(0)} f(\zeta)\zeta^{-j-1}\, d\zeta \tag{2}$$

gegeben, und erfüllen damit die folgende Abschätzung: Für jedes r mit $0 < r < R$ gibt es ein $M = M_r$ sodass $|a_j| \leq \frac{M}{r^j}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ ist. □

Bemerkung 3. Die Abschätzung für die a_j erlaubt folgende Interpretation: Es gibt ein $R > 0$ und holomorphe Funktionen g auf $D_R(0)$ und h auf $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$ sodaß $f(z) = g(z) + h(\frac{R^2}{z})$ für $|z| < R$ ist.

Allgemeiner kann man holomorphe Funktionen in Kreisringen in Laurentreihen entwickeln, was manchmal hilfreich ist.

Lemma 11. *Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Kreisring $D_{r,s}(p) = \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z-p| < s\}$. Dann existieren eindeutig bestimmte $a_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \mathbb{Z}$ sodass*

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j z^j, \quad r < |z-p| < s$$

gilt, und die Summe konvergiert gleichmässig auf kompakten Teilmengen von $D_{r,s}(p)$.

Definition 9. Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle p. Dann ist das Residuum $\operatorname{Res}_p f$ von f an der Stelle p der Koeffizient a_{-1} von $1/z$ in der Laurentreihenentwicklung von f um p.

Die folgende Beobachtung ist die Grundlage des Residuensatzes:

Lemma 12. *Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann gilt für kleine $\varepsilon > 0$*

$$\int_{bD_\varepsilon(p)} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}_p f.$$

Beweis. Wir entwickeln f in eine Laurentreihe um p,

$$f(z) = \sum_j a_j (z-p)^j.$$

Nachdem die Summe auf der kompakten Menge $bD_\varepsilon(p)$ gleichmässig konvergiert, haben wir

$$\int_{bD_\varepsilon(p)} f(\zeta) d\zeta = \sum_j a_j \int_{bD_\varepsilon(p)} (\zeta - p)^j\, d\zeta = 2\pi i a_{-1},$$

da $(\zeta - p)^j$ für $j \neq -1$ eine Stammfunktion besitzt, und das Integral damit verschwindet. $\square$

10. Der Residuensatz

Um uns dem Residuensatz zu nähern, betrachten wir zunächst die folgende Frage: Was passiert, wenn wir das Konturintegral einer holomorphen Funktion verändern, indem wir die Kontur über eine isolierte Singularität dieser Funktion an einer Stelle p verformen? Die Antwort wird durch Lemma 12 gegeben: Die Differenz der Integrale ist gerade durch $2\pi i \operatorname{Res}_p f$ gegeben.

Genauere Auskunft gibt uns der Residuensatz:

Satz 16. *Sei Γ ein nullhomologer Zykel in Ω und f eine holomorphe Funktion, die in Ω nur isolierte Singularitäten p_j ($j \in \mathbb{N}$) besitzt, und kein p_j auf Γ liegt. Wir nehmen an, dass die Menge $\{j \in \mathbb{N} \colon \operatorname{Ind}_{p_j} \Gamma \neq 0\}$ endlich ist. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_j (\operatorname{Ind}_{p_j} \Gamma)(\operatorname{Res}_{p_j} f).$$

Beweis. Wir wählen ein kleines $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\bigcup_{\operatorname{Ind}_{p_j} \Gamma \neq 0} D_\varepsilon(p_j) \cap \{p_j \colon \operatorname{Ind}_{p_j} \Gamma = 0\} = \emptyset$$

ist und betrachten den Zykel $\tilde\Gamma = \sum_j (\operatorname{Ind}_{p_j} \Gamma) bD_\varepsilon(p_j)$. Dann sind Γ und $\tilde\Gamma$ in $\tilde\Omega = \Omega \setminus \{p_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ homolog, und nach Satz 14 und Lemma 12 gilt

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\tilde\Gamma} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_j \operatorname{Ind}_{p_j} \Gamma \int_{bD\varepsilon} f(\zeta)/, d\zeta = 2\pi i \sum_j (\operatorname{Ind}_{p_j} \Gamma)(\operatorname{Res}_{p_j} f).$$

$\square$

Bemerkung 4. Es ist natürlich, zu fragen, ob die Endlichkeitsbedingung in Satz 16 notwendig ist. Wir werden später sehen, daß die Residuen keinen Wachstumsbedingungen unterliegen; deswegen sind wenn unendlich viele Singularitäten vorliegen immer gesonderte Konvergenzbetrachtungen notwendig.

Beispiel 3. Wir haben $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ (Übung: berechne das Integral mit elementarer Differentialrechnung). Dazu betrachten wir die Kontur Γ_R, welche den Halbkreis mit Radius R um 0 beschreibt; diese wird durch 2 offene Kurven beschrieben, die Strecke von $-R$ nach R und die Kurve C_R, gegeben durch Re^{it} für $0 \le t \le \pi$. Die Funktion $(1+z^2)^{-1}$ hat eine Singularität innerhalb dieser Kontur, an der Stelle $z = i$, mit Residuum

$$\mathrm{Res}_i(1+z^2)^{-1} = \mathrm{Res}_i(z+i)^{-1}(z-i)^{-1} = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Res}_i(z-i)^{-1} = \frac{1}{2i}.$$

Es folgt, dass

$$\pi = 2\pi i\,\mathrm{Res}_i(1+z^2)^{-1} = \int_{\Gamma_R} \frac{d\zeta}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} \frac{d\zeta}{1+z^2},$$

für jedes $R > 1$. Wir lassen nun $R \to \infty$; das zweite Integral strebt dann gegen 0 und die Behauptung folgt.

11. Einige Anwendungsbeispiele für den Residuensatz

11.1. Trigonometrische Integrale.

Beispiel 4. Wir berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}.$$

Dazu setzen wir $\cos\theta = \mathrm{Re}\,e^{i\theta} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, und ersetzen die Integration durch ein Kurvenintegral über den Einheitskreis, sodaß $izd\theta = dz$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{-2idz}{z^2+2az+1}.$$

Das letzte Integral berechnen wir mit Hilfe des Residuensatzes. Die Nullstellen von $z^2+2az+1$ sind

$$-a+\sqrt{a^2-1}, \quad -a-\sqrt{a^2-1};$$

wenn $|a| < 1$, so liegen die Nullstellen am Einheitskreis, und wir können den Residuensatz nicht anwenden. Ist $a > 1$, so ist $-1 < -a+\sqrt{a^2-1} < 1$, und wir berechnen

$$\int_{|z|=1} \frac{-2idz}{z^2+az+1} = 4\pi\,\mathrm{Res}_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} \frac{1}{(z-(-a+\sqrt{a^2-1}))(z-(-a-\sqrt{a^2-1}))} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Eine ähnliche Rechnung führt auch im Fall $a < -1$ zum Ziel, das Ergebnis ist dann

$$\int_{|z|=1} \frac{-2idz}{z^2+az+1} = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Diese Art von Substitutionen ist bei allen Integralen von rationalen Funktionen (mit nicht verschwindendem Nenner) in $\sin\theta$ und $\cos\theta$ ziehlführend.

11.2. Uneigentliche Integrale über die reelle Achse.

Beispiel 5. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}.$$

Dazu benutzen wir eine Integrationskurve, die von 0 auf der reellen Achse bis $R > 0$ verläuft, gefolgt vom Kreissegment auf dem Kreis vom Radius R vom Winkel 0 bis $e^{i\frac{\pi}{n}}$, gefolgt vom Strahl mit diesem Winkel bis 0 (also ein Tortenstück). Der einzige Pol von $1/(1+z^{2n})$ in diesem Segment ist für $z = e^{i\frac{\pi}{2n}}$. Wir berechnen das Residuum mit Hilfe der Substitution $z = e^{i\frac{\pi}{2n}}w$:

$$\mathrm{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{2n}}} \frac{1}{1+z^{2n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{Res}_{w=1} \frac{1}{1-w^{2n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}\,\mathrm{Res}_{w=1} \frac{1}{(1-w)(1+w+\cdots+w^{2n-1})} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{2n}}}{2n}.$$

Daher ist nach einer einfachen Abschätzung des Integrals über das Kreissegment

$$\frac{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}} = -2\pi i\frac{e^{i\frac{\pi}{2n}}}{2n}$$

oder nach einer elementaren Umformung

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Beispiel 6. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Dazu verwenden wir als Integrationskurve die Strecke von $-R$ nach R auf der reellen Achse, gefolgt vom Halbkreis γ_R in der oberen Halbebene. Da

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R}\frac{dz}{(1+z^2)^2}\right| = 0,$$

erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=i}\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

11.3. Fourier Transformationen. Ein Spezialfall der vorangehenden Integrale ist die Berechnung der Fouriertransformation

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx.$$

Wenn f durch die Einschränkung einer analytischen Funktion auf die reelle Achse gegeben ist, kann man oft den Residuensatz anwenden, um $\hat{f}$ zu berechnen.

Beispiel 7. Wir berechnen die Fouriertransformierte von $f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Dazu nehmen wir zunächst an, dass $t < 0$ ist, und verwenden den rechteckigen Pfad, der die Punkte $(-R, 0)$, $(R, 0)$, (R, S), und $(-R, S)$ verbindet. Für $R > 0$ und $S > 1$ haben wir dann

$$\begin{aligned}2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=i} f(z)e^{-itz} = &\int_{-R}^{R} f(x)e^{-itx}\,dx + \int_0^S f(R+iy)e^{-it(R+iy)}\,dy\\ &+\int_R^{-R} f(x+iS)e^{-it(x+iS)}\,dx + \int_S^0 f(-R+iy)e^{-it(-R+iy)}\,dy.\end{aligned}$$

Wenn wir nun $S\to\infty$ gehen lassen, verschwindet das dritte Integral in dieser Summenzerlegung, da

$$\left|\int_R^{-R} f(x+iS)e^{-it(x+iS)}\,dx\right| \le \frac{CRe^{tS}}{S^2},$$

und $t < 0$ angenommen war. Wir betrachten nun das zweite Integral und lassen in diesen zunächst $S\to\infty$ und dann $R\to\infty$. Wir erhalten für den ersten Grenzübergang das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(R+iy)e^{-it(R+iy)}\,dy$, und schätzen ab:

$$\left|\int_0^\infty f(R+iy)e^{-it(R+iy)}\,dy\right| \le \frac{C}{R^2}\int_0^\infty e^{ty}\,dy = \frac{C}{R^2 t}\to 0 \quad (R\to\infty).$$

Eine ähnliche Abschätzung lässt uns den Grenzübergang im vierten Integral durchführen. Wir erhalten

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx = \sqrt{2\pi}i\,\mathrm{Res}_{z=i}\frac{e^{-itz}}{1+z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^t, \quad t<0.$$

Falls $t > 0$, so müssen wir statt einem Rechteck in der oberen Halbebene eines in der unteren Halbebene verwenden, also mit $S < 0$ arbeiten. Exakt dieselben Argumente liefern dann

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx = -\sqrt{2\pi}i\,\mathrm{Res}_{z=-i}\frac{e^{-itz}}{1+z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-t} \quad t>0.$$

Für $t = 0$ erinnern wir an Beispiel 3, und erhalten

$$\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Zusammengefasst ist $\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|t|}$.

11.4. Summation unendlicher Reihen. Oft kann man den Residuensatz verwenden, um eine Reihe zu summieren, indem man die Reihenterme als die Residuen einer Funktion mit passenden Wachstumseigenschaften realisiert.

Beispiel 8. Wir bestimmen die Summe von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Dazu verwenden wir die Funktion $\pi \cot(\pi z)$. Diese hat einfache Pole an allen Stellen $n \in \mathbb{Z}$; das Residuum an diesen Stellen berechnet sich durch

$$\mathrm{Res}_{z=n}\, \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = 1.$$

Wir benutzen nun folgende zu zeigende

Tatsache: Auf dem Rechteck γ_N, welches symmetrisch um den Ursprung liegt, die reelle Achse in den Punten $-N - 1/2$ und $N + 1/2$, und die imaginäre Achse in den Punkten $-iN$ und iN schneidet, ist $|\cot(\pi z)| \leq 2$.

Damit sehen wir, dass $\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} \pi \frac{\cot \pi z}{z^2}\, dz = 0$; auf der anderen Seite gilt

$$\int_{\gamma_N} \pi \frac{\cot \pi z}{z^2}\, dz = 2\pi i \sum_{n \leq N} \mathrm{Res}_{z=n}\, \pi \frac{\cot \pi z}{z^2} = 4\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=0}\, \pi \frac{\cot \pi z}{z^2}.$$

Eine einfache Rechnung liefert uns nun

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, \pi \frac{\cot \pi z}{z^2} = \frac{-\pi^2}{3}.$$

Wenn wir nun $N \to \infty$ lassen, erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

12. Existenz von Stammfunktionen

Satz 17. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, z_0. Dann gibt es genau ein $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $F(z_0) = 0$ und $F' = f$.*

Beweis. Für jedes $z \in \Omega$ wählen wir eine Kurve γ_z, welche z_0 mit z verbindet, und definieren

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Diese Definition ist tatsächlich unabhängig von der gewählten Kurve, da für eine andere Kurve $\tilde{\gamma}_z$ die Zusammensetzung $(\tilde{\gamma}_z)^{-1}\gamma_z$, definiert durch

$$(\tilde{\gamma}_z)^{-1}\gamma_z(t) = \begin{cases} \gamma_z(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \tilde{\gamma}_z(1 - 2t) & t \in [1/2, 1] \end{cases},$$

eine geschlossene Kurve durch z_0 ist, also nach Satz 4

$$0 = \int_{(\tilde{\gamma}_z)^{-1}\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Offensichtlich ist $F(z_0) = 0$. Für ein beliebiges $w \in \Omega$ können wir nun eine Kreissscheibe $D_r(w) \subset \Omega$ wählen, und für $z \in D_r(w)$ ist

$$F(z) = \int_{\gamma_w} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

wobei $[w, z]$ die Strecke von w nach z bezeichnet.

Die Ableitung des zweiten Integrals haben wir bereits in Satz 1 berechnet, und erhalten so $F'(z) = f(z)$. □

Satz 18. *Sei Ω zusammenhängend und einfach zusammenhängend, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, und $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es genau eine Funktion $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $g(z_0) = 0$ und $f(z_0)e^g = f$. Insbesondere gibt es beliebige holomorphe Wurzeln nichtverschwindender holomorpher Funktionen.*

Beweis. Die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ ist holomorph auf Ω. Wir wählen eine Stammfunktion $g(z)$ von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ mit $g(z_0) = 0$. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{-g(z)} = -e^{-g(z)} \frac{f'(z)}{f(z)},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z)e^{-g(z)} = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)} \frac{f'(z)}{f(z)} = 0.$$

Wir schließen, dass $f(z)e^{-g(z)} = C \in \mathbb{C}$ ist, und $C = f(z_0)$ da $g(z_0) = 0$. □

13. Der Satz über inverse Funktionen

Satz 19. *Sei $f \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$, $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $s > 0$ und eine Funktion $g \in \mathcal{H}(D_s(f(z_0)))$ mit $f \circ g(z) = z$. g ist eindeutig bestimmt (bis auf s).*

Beweis. Wir können annehmen, dass $z_0 = f(z_0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist, und schreiben $f(z) = z + a(z)$, wo $a(z) = z^2\tilde{a}(z)$ mit $a(z), \tilde{a}(z) \in \mathcal{H}(D_r(0))$ ist. Dann gibt es ein $R < r$ (und wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $R < 1$) mit $|a'(z)| < 1/2$ für $z \in D_R(0)$, und damit gilt für beliebige $z, w \in D_R(0)$

$$|a(z) - a(w)| = \left| \int_0^1 a'(z + t(w - z))(w - z)\, dt \right| \leq \frac{1}{2}|z - w|.$$

Wir definieren nun eine Abbildung $T\colon C(\overline{D_s(0)}) \supset X \to C(\overline{D_s(0)})$ durch

$$T(g)(z) = z - a(g(z)),$$

wobei wir s und X noch bestimmen wollen. Zunächst bemerken wir, dass

$$\|T(g_1) - T(g_2)\|_\infty = \sup_{|z|\leq s} |a(g_1(z)) - a(g_2(z))| \leq \frac{1}{2} \sup_{|z|\leq s} |g_1(z) - g_2(z)| = \frac{1}{2} \|g_1 - g_2\|_\infty$$

ist, wenn $\|g_1\|_\infty < R$ und $\|g_2\|_\infty < R$. Weiters ist für $s < R$ mit einer Konstanten $C > 0$ $|a(z)| \leq C|z|^2$, und so

$$\|T(g)\|_\infty \leq s + C \|g\|_\infty^2 .$$

Wählen wir also $s = R/4$ und $X = \{g \in C(\overline{D_s(0)})\colon g(0) = 0, \quad \|g\|_\infty < R/2\sqrt{C}\}$, so ist $T(g) \in X$ für $g \in X$. Damit haben wir gezeigt, dass T eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raums X ist, und können den Banachschen Fixpunktsatz anwenden.

Die Lösung g der Fixpunktgleichung $Tg = g$ ist als gleichmäßiger Limes der Folge holomorpher Funktionen $B_1(z) = z$, $B_j(z) = z - a(B_{j-1}(z))$ (i.e. $B_j = T^{(j)}(0)$) wiederum holomorph nach Satz 5. □

Eine allgemeine holomorphe Funktion ist nicht notwendigerweise holomorph invertierbar, wie das Beispiel der Funktion $z \mapsto z^n$ zeigt. Diese Funktion ist lokal der allgemeine Modellfall:

Satz 20 (Satz von der offenen Abbildung). *Sei $f \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine offene Umgebung U von z_0 und eine Funktion $g \in \mathcal{H}(U)$ mit $g(z_0) = z_0$ sodass $f \circ g(z) = (z - z_0)^n + f(z_0)$ auf U. Insbesondere ist f offen.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\tilde{f}(z) = f(z) - f(z_0)$. Da f holomorph ist, können wir $\tilde{f}(z) = (z - z_0)^n\varphi(z)$ mit $\varphi(0) \neq 0$ schreiben. Damit gibt es nach Satz 18 eine holomorphe Funktion $\psi(z)$ mit $\psi(z)^n = \varphi(z)$, und damit $\tilde{f}(z) = ((z - z_0)\psi(z))^n$. Die Funktion $(z - z_0)\psi(z) = \alpha(z)$ erfüllt $\alpha(z_0) = 0$ und $\alpha'(0) = \varphi(0) \neq 0$. Nach Satz 19 gibt es also eine Funktion $\beta(z)$, definiert in einer Umgebung von z_0 mit $\beta(z_0) = z_0$ welche $\alpha(\beta(z)) = z - z_0$ erfüllt.

Damit ist $f(\beta(z)) = f(z_0) + \tilde{f}(\beta(z)) = f(z_0) + \alpha(\beta(z))^n = f(z_0) + (z - z_0)^n$. $\square$

14. Übungsaufgaben

(1) Skizziere die Lage der n-ten *Einheitswurzeln*, i.e. jener Punkte z mit $z^n = 1$ in der Ebene.
(2) Zeige, dass die Menge der n-ten Einheitswurzeln E_n eine (abelsche) Gruppe bezüglich der Multiplikation bildet, welche isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}_n$ ist. Bestimme alle Erzeuger der Gruppe E_n sowie alle Untergruppen.
(3) Bestimme die dritten und sechsten Einheitswurzeln sowohl graphisch als auch algebraisch.
(4) Finde die Polardarstellung von $3 + 4\imath$, $2 + \imath 2$, und $-\sqrt{3} - 3\imath$.
(5) Finde die kartesischen Koordinate von $4e^{\imath\frac{\pi}{3}}$, $2e^{\imath\pi}$, und $5e^{\imath\frac{3\pi}{4}}$.
(6) Schreibe die reell-lineare Abbildung $z = x + \imath y \mapsto x + y$ als Summe von z und $\bar{z}$.
(7) Bestimme den Real- und Imaginärteil der Funktionen $z \mapsto z^n$ (Hinweis: binomischer Lehrsatz).
(8) Zeige, dass jeder Kreis bzw. jede Gerade in $\mathbb{C}$ als Nullstellenmenge einer Quadrik in $\mathbb{CP}$ geschrieben werden kann, und dass umgekehrt die Nullstellenmenge jeder solchen Quadrik ein Kreis bzw. eine Gerade ist.
(9) Betrachte die Abbildung (die Inversion am Einheitskreis) $z \mapsto z^{-1}$, welche $\hat{\mathbb{C}}$ auf $\hat{\mathbb{C}}$ abbildet. Berechne das Bild eines (allgemeinen) Kreises sowie das einer (allgemeinen) Geraden unter dieser Abbildung!
(10) Berechne das Bild einer Quadrik in $\mathbb{CP}$ unter einer gebrochen linearen Abbildung mit Hilfe der Matrixdarstellung der definierenden Gleichung!
(11) Zeige, dass sich jede gebrochen lineare Abbildung als Zusammensetzung von Translationen $z \mapsto z + a$, Drehstreckungen $z \mapsto \lambda z$, und der Inversion $z \mapsto z^{-1}$ schreiben lässt.
(12) Bestimme die gebrochen linearen Abbildungen, welche den Einheitskreis in sich selber überführen (Hinweis: in homogenen Koordinaten $[z : w]$ ist der Einheitskreis durch $|z|^2 - |w|^2 = 0$ gegeben).
(13) Zeige, dass die stereographische Projektion stetig ist.
(14) Zeige $e^{z+w} = e^z e^w$ für $z, w \in \mathbb{C}$ (Hinweis: Cauchymultiplikation und Fehlerabschätzung).
(15) Finde die Potenzreihenentwicklungen von

$$\frac{1}{1+z^2}, \quad \frac{1}{2-3z}, \quad \frac{1}{(1-z)^2}$$

und bestimme ihre Konvergenzradien.
(16) Definiere

$$\cos(z) = \frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath}.$$

Zeige die Additionssatze (für *komplexe* Werte von z, w).
(17) Forme die Gleichung $(A \circ B)(z)$, wo $A \in \mathbb{C}[[z]]$ mit $A(0) = 0$ und $A_1 = 1$ ist, in eine Fixpunktgleichung für B um. Versuche dann, ein iteratives Lösungsschema wie im Banach'schen Fixpunktsatz anzuwenden, und untersuche die Konvergenz dieses Schemas mit Hilfe der im Skriptum angegebenen Metrik.
(18) Die Funktion $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$ ist für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar im Punkt z_0. Die Funktion $z \mapsto z^{-n}$ ist für jedes $z_0 \neq 0$ komplex differenzierbar im Punkt z_0. Finde eine Formel für ihre Ableitung.
(19) Zeige

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

(20) Zeige

$$\frac{\partial fg}{\partial z} = f\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}g, \quad \frac{\partial fg}{\partial \bar{z}} = f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g$$

(21) Leite die Kettenregel für die Wirtingerableitungen her, i.e.

$$\frac{\partial f\circ g}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial w}\circ g\right)\frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar w}\circ g\right)\frac{\partial \bar g}{\partial z}$$
$$\frac{\partial f\circ g}{\partial \bar z} = \left(\frac{\partial f}{\partial w}\circ g\right)\frac{\partial g}{\partial \bar z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar w}\circ g\right)\frac{\partial \bar g}{\partial \bar z}$$

(dabei kann die reelle Kettenregel verwendet werden).

(22) Zeige, dass wenn $f(z)$ komplex differenzierbar im Punkt z_0 ist, die Funktion $\overline{f(z)}$ genau dann komplex differenzierbar im Punkt z_0 ist, wenn $f'(z) = 0$ ist.

(23) Zeige: f ist komplex differenzierbar im Punkt z_0 genau dann, wenn $\frac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0) = 0$.

(24) Zeige, dass für komplexwertige (Riemann-) integrierbare Funktionen f, g auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und einen komplexen Skalar λ

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \lambda \int_a^b g(x)\, dx$$

gilt.

(25) Zeige, dass

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

ist. Welche Vorraussetzungen an f muss man hier treffen? (Achtung für die Fortgeschrittenen: Unterschied zwischen Lebesgue und Riemann!)

(26) Zeige, dass eine in jedem Punkt in einer Kreisscheibe $D_r(z_0)$ komplex differenzierbare Funktion f für welche $f'(z) = 0$ in $D_r(z_0)$ ist notwendigerweise konstant auf $D_r(z_0)$ ist (Hinweis: benutze ein geeignetes Kurvenintegral).

(27) Zeige, dass eine holomorphe Funktion mit konstantem Betrag auf einer Scheibe $D_r(z_0)$ notwendigerweise konstant ist. (Hinweis: Differenziere die Gleichung $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = c$ zweimal).

(28) Berechne das Kurvenintegral

$$\int_\gamma z^n\, dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \gamma(t) = re^{\imath t}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(29) Berechne die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma_+} \frac{1}{z}\, dz, \quad \int_{\gamma_-} \frac{1}{z}\, dz,$$

wo $\gamma_+(t) = e^{\imath t}$, $\gamma_-(t) = e^{-\imath t}$, $t \in [0, \pi]$, sowie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz,$$

wo $\gamma(t) = re^{\imath t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(30) Berechne unter Verwendung der Cauchy'schen Integralformel

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz,$$

über die Kurve γ_R, welche den Rand eines Halbkreises mit Mittelpunkt 0 und Radius R beschreibt. Lasse $R \to \infty$ gehen und zeige, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

(31) Berechne das Kurvenintegral

$$F(w) = \int_S \frac{e^{\imath z w}}{1+z^2}\, dz,$$

wo S den Rand des Rechtecks $[-A, A] \times [0, B]$ beschreibt. Versuche, für $w \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $A, B \to \infty$ zu berechnen!

(32) Zeige das *Minimumsprinzip*: Wenn ein holomorphe Funktion, welche in einem Gebiet Ω nirgends verschwindet, ein lokales Betragsminimum in Ω besitzt, so ist sie konstant. Formuliere eine Korollar 2 entsprechende Folgerung für beschränkte Gebiete!

(33) Betrachte die Funktion $z \mapsto e^z$ auf $\{\operatorname{Re} z < 0\}$ und zeige, dass die Folgerung aus dem Minimumsprinzip auf unbeschränkten Gebieten nicht unbedingt erfüllt ist!

(34) Sei $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. Gib ein $R > 0$ an, sodass p alle Nullstellen in $D_R(0)$ hat!

(35) Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\frac{1}{z^2 + z - 6}$$

im Punkt $z_0 = \frac{1}{2}$?

(36) Sei p ein Polynom vom Grad k. Zeige, dass $p(1/z)$ einen Pol der Ordnung k im Ursprung hat.

(37) Sei f eine holomorphe Funktion mit einer Nullstelle der Ordnung k im Punkt p. Zeige, dass $1/f(z)$ einen Pol der Ordnung k an der Stelle p hat.

(38) Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann hat $g(z) = 1/f(z)$ eine hebbare Singularität an der Stelle p, wenn p ein Pol der Ordnung $k \geq 1$ ist, und $g(z)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung k in diesem Punkt. Wenn p eine essentielle Singularität von f ist, so auch von g.

(39) $\mathcal{M}(\Omega)$ ist ein Körper, welcher $\mathcal{H}(\Omega)$ enthält. Zeige, dass $\mathcal{M}(\Omega)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{H}(\Omega)$ ist.

(40) Beweise Lemma 11 (folge dem Beweis von Lemma 10).

(41) Finde die Laurentreihenentwicklung von $f(z) = z^{-1} + (z-1)^{-1} + (z-2)^{-1}$ auf $D_{0,1}(0)$, $D_{1,2}(0)$, und $D_{2,\infty}(0)$.

(42) Berechne $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$.

(43) Berechne $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

(44) Berechne $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^4}$.

(45) Berechne $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$. (Verwende $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$)

(46) Bestimme $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$. (Dazu verwende eine Modifikation von $\pi\cot(\pi z)$, um die Vorzeichen zu erhalten)

(47) Bestimme $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$.