HÖHERE KOMPLEXE ANALYSIS

BERNHARD LAMEL

1. Wiederholung und Vertiefung grundlegender Begriffe der Funktionentheorie

1.1. **Holomorphie und CR Gleichungen.** Zunächst wollen wir den für die Funktionentheorie grundlegenden Begriff der *Holomorphie* wiederholen. Wir schreiben $z = x+iy$ für die Variablen in $\mathbb{C}$, wo $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$ reelle Zahlen sind. Die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

erlauben es uns, das Differential einer komplexwertigen stetig differenzierbaren Funktion $f \in C^1(\Omega)$, definiert auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

in der Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

wo $dz = dx + idy$ und $d\bar{z} = dx - idy$ ist. zu schreiben. Wir wollen zunächst diese Identifikation exakt machen.

Zunächst erinnern wir daran, dass die Bedeutung von df für eine reellwertige Funktion f die folgende ist: Jedem Punkt $p \in \Omega$ wird die lineare Funktion $df(p)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (das *Differential von f an der Stelle p*) zugeordnet, welche für v durch

$$df(p)(v) := \lim_{t\to 0}\frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(p)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)v_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx(v) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy(v)$$

definiert ist. df ist also eine Abbildung $\Omega \to (\mathbb{R}^2)^*$. In dieser Darstellung haben wir als Basis von $(\mathbb{R}^2)^*$ die Standardbasis $\{dx, dy\}$ gewählt, wobei $dx(h,k) = h$ und $dy(h,k) = k$ ist.

Falls wir komplexwertige Abbildungen betrachten, so müssen wir statt $(\mathbb{R}^2)^*$ die *Komplexifizierung* $\mathbb{C} \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ betrachten, also den Vektorraum aller reell-linearen Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ mit Werten in $\mathbb{C}$, i.e. Funktionen $\lambda\colon \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ welche

$$\lambda(v + tw) = \lambda(v) + t\lambda(w), \quad v, w \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

erfüllen; dieser Raum besteht konkret aus den Linearkombinationen $a\,dx + b\,dy$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Der Raum $V = \mathbb{C} \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ ist in natürlicher Weise ein *komplexer* Vektorraum.

Wir definieren nun einen komplex-linearen Isomorphismus $J\colon V \to V$ durch

$$(J\lambda)(v) = \lambda(iv).$$

Da $J^2 = -\operatorname{id}$, sind die Eigenwerte von J durch i und $-i$ gegeben. Die Eigenvektoren zum Eigenwert i sind die komplex-linearen Funktionale $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die Eigenvektoren zum Eigenwert $-i$ sind die komplex-antilinearen Funktionale $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Die Eigenräume werden üblicherweise mit

$$V^{(1,0)} = \{\lambda\colon J\lambda = i\lambda\}, \quad V^{(0,1)}\mathbb{C} = \{\lambda\colon J\lambda = -i\lambda\}$$

bezeichnet, und die Zerlegung

$$V = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$$

ist explizit durch

$$\lambda = \frac{\lambda - iJ\lambda}{2} + \frac{\lambda + iJ\lambda}{2}$$

gegeben.

Date: January 2, 2017.

Beispiel 1. Die Zerlegung von dx in ein komplex-lineares und ein komplex-antilineares Funktional ist durch

$$dx = \frac{dx - iJdx}{2} + \frac{dx + iJdx}{2} = \frac{dx + idy}{2} + \frac{dx + -idy}{2} =: \frac{dz}{2} + \frac{d\bar{z}}{2}$$

gegeben.

Das Differential einer komplexwertigen differenzierbaren Funktion $f = u + iv$, wo $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ reellwertige Funktionen sind, ist definiert durch

$$\begin{aligned} df(p)(v) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx(v) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy(v) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(p) + i\frac{\partial v}{\partial x}(p)\right) dx(v) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(p) + i\frac{\partial v}{\partial y}(p)\right) dy(v). \end{aligned}$$

Das Differential ist ein Beispiel einer 1-Form. Allgemein ist eine 1-Form auf $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine Abbildung $\omega\colon \Omega \to V$, und man spricht von stetigen, differenzierbaren, bzw. stetig differenzierbaren 1-Formen wenn die Abbildung ω entsprechend stetig, differenzierbar, bzw. stetig differenzierbar ist. Das Differential einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist also eine stetige 1-Form df; in jedem Punkt p ist $df(p)$ eine reell-lineare Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Man kann 1 Formen entlang von stückweise stetig differenzierbaren Kurven integrieren; eine stetige Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ist stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ des Intervalls $[a,b]$ gibt, sodass $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ stetig differenzierbar für $j = 0,\ldots,N-1$ ist. Für eine solche Kurve γ definiert man

$$\int_\gamma \omega := \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt.$$

Die Substitutionsformel besagt gerade, dass das Kurvenintegral einer 1-Form von der Parametrisierung der Kurve unabhängig ist.

Eine wichtige (einfache) Abschätzung ist das folgende

Lemma 1. *Sei ω eine auf einer Umgebung des Bilds einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ stetige 1-Form. Dann gilt*

$$\left|\int_\gamma \omega\right| \leq \sup_{z\in\gamma} \|\omega(z)\|\, L(\gamma).$$

Die Norm $\|\omega(z)\|$ ist die kleinste Zahl M für welche $|\omega(v)| \leq M|v|$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Proof. Es genügt, dies für stetig differnzierbare Kurven zu zeigen. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \left|\int_\gamma \omega\right| &= \left|\int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |\omega(\gamma(t))(\gamma'(t))|\,dt \\ &\leq \int_a^b \|\omega(\gamma(t))\|\,|\gamma'(t)|\,dt \\ &\leq \sup_{z\in\gamma} \|\omega(\gamma(t))\| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\ &= sup_{z\in\gamma}\,\|\omega(\gamma(t))\|\,L(\gamma). \end{aligned}$$

□

Die Zerlegung eines Differentials in eine komplex-lineare und eine komplex-antilineare Funktion ist grundlegend für den Holomorphiebegriff. Sie ist konkret gegeben durch

$$\begin{aligned}
df(p)(v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,dy \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(p)\frac{dz+d\bar z}{2}(v) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\frac{dz-d\bar z}{2i}(v) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) - i\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)dz(v) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) + i\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)d\bar z(v) \\
&=: \frac{\partial f}{\partial z}(p)\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(p)\,d\bar z =: \partial f + \bar\partial f.
\end{aligned}.$$

Eine 2-Form ist eine Abbildung η, welche auf Ω definiert ist und jedem Punkt $p \in \Omega$ eine alternierende Multilinearform vom Grad 2 zuordnet. Das heisst, $\eta(p)$ ist eine Funktion $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche

$$\eta(p)(v,w) = -\eta(p)(w,v), \quad \eta(p)(u+tv,w) = \eta(p)(u,w) + t\eta(p)(v,w), \quad u,v,w \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

erfüllt. Für zwei 1-Formen ω_1 und ω_2 ist zum Beispiel das Keilprodukt

$$\omega_1 \wedge \omega_2(v,w) := \omega_1(v)\omega_2(w) - \omega_1(w)\omega_2(v).$$

Ein bekanntes solches Keilprodukt ist

$$dx \wedge dy\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

Lemma 2. *Eine 2-Form η auf Ω lässt sich als $\eta = f\,dx \wedge dy$ für eine eindeutig bestimmte Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ schreiben.*

Proof.

$$\begin{aligned}
\eta(p)\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) &= \eta(p)(v_1e_1 + v_2e_2, w_1e_1 + w_2e_2) \\
&= v_1w_2\eta(p)(e_1,e_2) + v_2w_1\eta(p)(e_2,e_1) \\
&= \eta(p)(e_1,e_2)(v_1w_2 - v_2w_1) \\
&= \eta(p)(e_1,e_2)\,dx \wedge dy(v,w).
\end{aligned}$$

□

2-Formen lassen sich über Flächen integrieren, indem man für η und f wie in 2

$$\int_A \eta := \iint_A f(x,y)\,dxdy$$

definiert.

Die *äussere Ableitung* einer (stetig differenzierbaren) 1-Form $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ ist durch

$$\begin{aligned}
d\omega &= da \wedge dx + db \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial a}{\partial x}\,dx + \frac{\partial a}{\partial y}\,dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x}\,dx + \frac{\partial b}{\partial y}\,dy\right) dy \\
&= \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy
\end{aligned}$$

bzw. in der Form $\omega = c(x,y)\,dz + e(x,y)\,d\bar z$ durch

$$\begin{aligned}
d\omega &= dc \wedge dz + de \wedge d\bar z \\
&= \left(\frac{\partial c}{\partial z}\,dz + \frac{\partial c}{\partial \bar z}\,d\bar z\right) \wedge dz + \left(\frac{\partial e}{\partial z}\,dz + \frac{\partial e}{\partial \bar z}\,d\bar z\right) \wedge d\bar z \\
&= \left(\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial \bar z}\right) dz \wedge d\bar z
\end{aligned}$$

gegeben.

Der Satz von Stokes verallgemeinert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für die äussere Ableitung und verwandelt Kurvenintegrale in Flächenintegrale (und umgekehrt); wir werden einige seiner Anwendungen kennenlernen. Wir benötigen für den Beweis des Satzes sowie für seine Anwendungen den Begriff der (glatten) *Zerlegung der Eins*. Seien U_j offene Mengen, $j \in \mathbb{N}$. Eine

$\{U_j : j \in \mathbb{N}\}$ untergeordnete Zerlegung der 1 ist eine Familie von glatten Funktionen $\varphi_k : U_{j(k)} \to \mathbb{R}$ welche $\operatorname{supp}\varphi_j \subset\subset U_{j(k)}$ und für jedes kompakte K

$$\#\{k : \varphi_k|_K \neq 0\} < \infty$$

(lokale Endlichkeit) sowie

$$\sum_k \varphi_k(p) = 1, \quad p \in \cup_j U_j$$

erfüllt. Wir setzen die Existenz einer solchen Zerlegung der Eins im folgenden voraus.

Ein stückweise C^1 berandetes Gebiet Ω ist ein Gebiet, für dass folgendes gilt: Für jedes $p = (p_x, p_y) \in b\Omega$ existiert eine Umgebung $U = (a, b) \times (c, d)$ von p sodass $U \cap b\Omega$ nach einer Rotation mit Mittelpunkt p die folgende Form hat:

$$U \cap b\Omega = \{(x, y) \in U : y < f(x), a < x < b\}.$$

wobei f stetig differenzierbar auf $[a, p_x]$ und $[p_x, b]$ ist. Ein Gebiet dieser Form werden wir ein *normales Gebiet* nennen.

Lemma 3. *Wenn Ω ein normales Gebiet ist, so gilt für jede stetig differenzierbare 1-Form ω mit kompaktem Träger in $(a, b) \times (c, d)$*

$$\int_\Omega d\omega = \int_{b\Omega} \omega$$

(wobei wir den Rand positiv orientieren, d.h. Ω liegt links von $b\Omega$).

Proof. Nach Annahme ist Ω von der Form $\Omega = \{(x, y) \in U : y < f(x), a < x < b\}$, und $\omega = \lambda\, dx + \mu\, dy$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_\Omega d\omega &= \int_a^b \int_c^{f(x)} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) dy\, dx \qquad\qquad y = f(x) + u,\ dy = \\
&= \int_a^b \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, f(x) + u) - \frac{\partial \lambda}{\partial y}(x, f(x) + u)\right) du\, dx \\
&= \int_a^b \int_{-\infty}^0 \left(\frac{d}{dx}\mu(x, f(x) + u) - \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, f(x) + u) f'(x) - \frac{\partial \lambda}{\partial y}(x, f(x) + u)\right) du\, dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \int_a^b \frac{d}{dx}\mu(x, f(x) + u)\, dx\, dy - \int_a^b \int_{-\infty}^0 \frac{d}{du}\left(\mu(x, f(x) + u) f'(x) + \lambda(x, f(x) + u)\right) du\, dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \underbrace{\mu(b, f(b) + u)}_{=0} - \underbrace{\mu(a, f(a) + u)}_{=0} du - \int_a^b \lambda(x, f(x)) + \mu(x, f(x)) f'(x)\, dx \\
&= \int_{b\Omega} \omega.
\end{aligned}$$

□

Satz 1. *Sei Ω ein beschränktes, stückweise C^1 berandetes Gebiet, ω eine in einer Umgebung von Ω stetig differenzierbare 1-Form. Dann gilt*

$$\int_\Omega d\omega = \int_{b\Omega} \omega.$$

Proof. Wir überdecken $\overline{\Omega}$ mit offenen Mengen Ω_j sodass $\Omega_j \cap \overline{\Omega}$ entweder offen oder ein normales Gebiet ist. Wir wählen weiters eine der Familie Ω_j untergeordnete Zerlegung der 1, welche wir mit φ_k bezeichnen.

Dann ist nach 3

$$\begin{aligned}\int_\Omega d\omega &= \int_\Omega d\left(\sum_k \varphi_k\omega\right)\\ &= \sum_k \int_{\Omega_{j(k)}} d(\varphi_k\omega)\\ &= \sum_k \int_{b\Omega_{j(k)}} \varphi_k\omega\\ &= \sum_k \int_{b\Omega} \varphi_k\omega\\ &= \int_{b\Omega} \sum_k \varphi_k\omega\\ &= \int_{b\Omega} \omega.\end{aligned}$$

□

Für den Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

erhalten wir folgende wichtige Formel:

Korollar 4. *Sei Ω ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet, $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann ist*

$$\int_\Omega \Delta u = \int_{b\Omega} u_x dy - u_y dx.$$

Korollar 5. *Sei Ω ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet. Dann ist*

$$V(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{b\Omega} xdy - ydx.$$

Korollar 6. *Sei Ω ein beschränktes, stückweise C^1-berandetes Gebiet, $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann ist*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta} d\zeta\wedge d\bar\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Vor dem Beweis des Korollars erinnern wir noch an eine wichtige Tatsache: das Integral

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{1}{|x|^p}\,dx, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

konvergiert absolut, wenn $p < n$.

Proof. Wir betrachten $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus D_\varepsilon(z)$, das wiederum ein beschränktes, stückweise C^1 berandetes Gebiet ist. Die Form

$$\omega = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

erfüllt $\omega \in C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$, und

$$d\omega = -\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\frac{1}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\bar\zeta.$$

Nach Theorem 1 ist

$$\int_{b\Omega}\omega - \int_{bD_\varepsilon(z)}\omega = \int_{\Omega_\varepsilon} d\omega.$$

Beim Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ folgt die Aussage, da das Flächenintegral absolut konvergiert, und

$$\left|\int_{bD_\varepsilon(z)}\omega - 2\pi i f(z)\right| = \left|\int_{bD_\varepsilon(z)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \le 2\pi \max_{|\zeta - z|=\varepsilon}|f(\zeta)-f(z)| \to 0.$$

□

Korollar 7. *Sei $u \in C^1_c(\mathbb{C})$. Dann erfüllt die Funktion*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\wedge d\bar\zeta$$

Proof. Wir definieren für $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}\setminus D_\varepsilon(z)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta};$$

es gilt $f_\varepsilon \to f$ für $\varepsilon \to 0$ in $C^1(\mathbb{C})$, da die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}\setminus D_\varepsilon(z)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

□

Übung 1. Beschreibe alle komplex-linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$: Welche 2×2 Matrizen entsprechen einer komplex linearen Abbildung? Da jede lineare Abbildung eines Körpers in sich selber notwendigerweise durch skalare Multiplikation gegeben ist, kann man dies verwenden, um einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$ mit einer Menge von 2×2-Matrizen herzustellen. Führe dies durch.

Insbesondere können wir das Differential $df = \lambda$ dementsprechend zerlegen und erhalten dann nach einer einfachen Rechnung

$$\lambda_c = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz, \quad \lambda_a = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z}.$$

Wir haben dann die folgenden grundlegenden Äquivalenzen, welche die komplexe Differenzierbarkeit an einem Punkt beschreiben.

Satz 2. *Sei $p \in \mathbb{C}$, Ω eine offene Umgebung von p, und $f = u + iv \in C^1(\Omega)$ mit u, v reellwertig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

i) *Der Grenzwert $\lim_{\mathbb{C}\ni w\to 0} \frac{f(p+w)-f(p)}{w}$ existiert.*

ii) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) = 0$.

iii) *Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen halten an der Stelle p, i.e. $u_x(p) = v_y(p)$ und $u_y(p) = -v_x(p)$.*

iv) *Die Ableitungsmatrix $Df(p)$ von f an der Stelle p, aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, ist von der Form*

$$Df(p) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

v) *Das Differential von f an der Stelle p ist komplex linear.*

Wir sagen dann, daß f an der Stelle p komplex differenzierbar ist. Die Ableitung von f an der Stelle p wird dann mit $f'(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p)$ bezeichnet, und ist sowohl der Grenzwert in i) *als auch die Matrix in* iv) *unter dem Isomorphismus aus Übungsaufgabe 1.*

Übung 2. Beweise Satz 2.

Wenn eine Funktion an jeder Stelle einer offenen Menge komplex differenzierbar ist, so ist sie holomorph; wir können allerdings Holomorphie auch mit Hilfe von Potenzreihenentwicklungen und Integralformeln charakterisieren. Dazu verwenden wir die folgende wichtige Formel:

Proposition 8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, deren Rand stückweise stetig differenzierbar ist, und $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - p}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta - p} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man die folgenden Charakterisierungen von Holomorphie herleiten.

Satz 3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und $f \in C^1(\Omega)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

i) *f ist komplex differenzierbar an jedem $p \in \Omega$.*

ii) *Für jedes $p \in \Omega$ und jede Kreisscheibe $D_r(p)$ um p mit $D_r(p) \subset \Omega$ gilt*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD_r(p)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - p}\, d\zeta.$$

iii) *Für jedes $p \in \Omega$ gibt es komplexe Zahlen a_j, $j \in \mathbb{N}$, sodaß*

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j (z-p)^j$$

mit gleichmässiger Konvergenz auf jeder Kreisscheibe $D_r(p)$ um p mit $D_r(p) \subset \Omega$.

Eine Funktion f, welche die Bedingungen von Satz 3 erfüllt, ist holomorph auf Ω; wenn wir den Definitionsbereich von f nicht genauer spezifizieren wollen, so sagen wir einfach, dass f eine holomorphe Funktion ist. Die Menge aller auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ holomorphen Funktionen wird mit $\mathcal{H}(\Omega)$ bezeichnet.

1.2. **Die Cauchy'sche Integralformel, Homotopie, und Homologie.** Die Cauchy'sche Integralformel ist eines der wichtigsten Ergebnisse aus dem ersten Kurs über komplexe Analysis. Wir werden sie oft anwenden, und dementsprechend wollen wir sie wiederholen. Die einfachste Version der Cauchy'schen Integralformel ist die folgende; wir erinnern daran, dass eine einfache geschlossene Kurve γ die komplexe Ebene in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt; die beschränkte heisst *das Innere* $\operatorname{Int}\gamma$ der Kurve, die unbeschränkte *das Äussere* $\operatorname{Ext}\gamma$ der Kurve.

Satz 4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, γ eine einfache geschlossene Kurve, stückweise stetig differenzierbar, in Ω, mit $\operatorname{Int}\gamma \subset \Omega$. Dann ist*

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für jede holomorphe Funktion f in Ω.

Die Bedingung dass γ eine einfache geschlossene Kurve ist bedeutet, dass γ eine zusammenhängende offene Teilmenge (das Innere von γ) von Ω berandet. Eine der Anwendungen von Satz 4 ist die Invarianz des Kurvenintegrals einer holomorphen Funktion unter Homotopien. Wir erinnern an die folgende Definition.

Definition 9. Zwei stetige Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to \Omega$ sind homotop wenn es eine stetige Abbildung $H \colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ gibt sodass $H(t,0) = \gamma_0(t)$ und $H(t,1) = \gamma_1(t)$. Jede solche Abbildung H wird als Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 bezeichnet.

Wir bemerken, dass falls γ_0 und γ_1 stetig differenzierbar und als stetige Kurven homotop sind, auch eine stetig differenzierbare Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 existiert.

Satz 5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, γ_0 und γ_1 stückweise stetig differenzierbare Kurven welche homotop sind. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta$$

für jede holomorphe Funktion f in Ω.

Der Inhalt von Satz 5 ist, dass das Kurvenintegral einer holomorphen Funktion sich nicht ändert, fall man die Kurve innerhalb des Holomorphiebereichs dieser Funktion deformiert. Der Residuensatz (mit dem wir uns bald beschäftigen werden) sagt uns wie sich dieses Integral verändert, falls man die Kurve über eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion hinwegbewegt.

Oft ist es von Vorteil, nicht nur geschlossene Kurven zu betrachten, sondern "endliche Summen" von Kurven. Diese werden als 1-Zykel bezeichnet; genauer gesagt ist ein 1-Zykel in Ω ein Element der freien abelschen Gruppe Z_1 welche von den stetigen Abbildungen $\gamma \colon [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ erzeugt wird. Nicht alle solchen Zykel beranden ein Gebiet in Ω; die Frage, was genau sie beranden, führt uns zur Homologie.

Sei $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Unter einem 2-Zykel in Ω verstehen wir ein Element der von den stetigen Abbildungen $f \colon \Delta \to \Omega$ erzeugten freien abelschen Gruppe Z_2. Wir definieren eine Randabbildung $\partial \colon Z_2 \to Z_1$ mittels $(\partial f)(t) = f(e^{2\pi i t})$. Zwei 1-Zykel in Ω sind homolog, wenn ihre Differenz nullhomolog ist, also ein Rand ist (die Quotientengruppe $Z_1/(\partial Z_2)$ ist die Homologiegruppe von Ω).

Nullhomologe 1-Zykel erkennt man an an ihrer *Windungszahl* auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Definition 10. Sei $\gamma = n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k \in Z_1$. Dann ist die Windungszahl von γ bezüglich $p \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ (d.h. p ausserhalb der Vereinigung der Bilder von γ_j) die ganze Zahl

$$\operatorname{ind}_\gamma p = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - p} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^k n_j \int_0^1 \frac{\dot\gamma_j(t)}{\gamma_j(t) - p}.$$

Übung 3. Berechne die Windungszahl eines Kreises um den Ursprung, der k-mal im bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Satz 6. *Ein 1-Zykel γ in Ω ist genau dann nullhomolog, wenn für alle $p \notin \Omega$ $\operatorname{ind}_\gamma p = 0$ gilt.*

Nullhomologe Zykel sind für uns wichtig, weil für sie die Cauchy'sche Integralformel gilt:

Satz 7. *Sei γ ein 1-Zykel in Ω welcher stückweise stetig differenzierbar ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
i) *γ ist nullhomolog in Ω.*
ii) *Für jede holomorphe Funktion f in Ω gilt*

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

iii) *Für jedes $z \in \Omega \setminus \gamma$ gilt*

$$(\mathrm{ind}_\gamma\, z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral einer holomorphen Funktion über zwei homologe Zykel gleich: Wenn Γ_1 und Γ_2 in Ω homolog sind, dann gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\Gamma_2} f(\zeta)\, d\zeta.$$

2. Isolierte Singularitäten und meromorphe Funktionen

Eine holomorphe Funktion f hat eine isolierte Singularität an einem Punkt $p \in \mathbb{C}$ wenn es eine Kreisscheibe $D_r(p)$ um p gibt sodass f holomorph auf $D_r(p) \setminus \{p\}$ ist. Wir benötigen die folgende Klassifikation von isolierten Singularitäten:

Satz 8. *Sei f eine holomorphe Funktion auf $D_r(p) \setminus \{p\}$. Dann gilt eine (und nur eine) der folgenden Aussagen:*
i) *Für jedes kleine $r > \varepsilon > 0$ ist $f(D_\varepsilon(p) \setminus \{p\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*
ii) *Es existiert ein $k \geq 0$ sodaß $(z-p)^k f(z)$ sich zu einer holomorphen Funktion auf $D_r(p)$ fortsetzen lässt.*

In dem Beweis des Satzes benötigen wir das folgende Lemma über "hebbare" Singularitäten.

Lemma 11. *Sei f eine beschränkte holomorphe Funktion auf $D_r(p) \setminus \{p\}$. Dann gibt es eine holomorphe Fortsetzung von f auf $D_r(p)$, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion F mit $F(z) = f(z)$ für $z \neq p$.*

Proof. Zunächst nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $p = 0$ ist. Sei $0 < \varepsilon < S < R < r$, und $M > 0$ so gewählt, dass $|f(z)| \leq M$ für $0 < |z| < R$ gilt . Nach Satz 7 gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \varepsilon < |z| < R.$$

Wir behaupten, dass das zweite Integral für $|z| > S$ gegen 0 konvergiert, wenn wir $\varepsilon \to 0$ streben lassen:

$$\left| \int_{bD_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{M\varepsilon}{S - \varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Wir haben deswegen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

zunächst für $S < |z| < R$ für ein fixes $S > 0$, und damit für $0 < |z| < R$. Die Fortsetzung F von f wird durch das Integral auf der rechten Seite der Gleichung definiert. □

Beweis von Satz 8. Wir nehmen an, dass i) nicht erfüllt ist, und zeigen, dass dann ii) gilt; wie zuvor nehmen wir an, dass $p = 0$ ist. Wenn i) nicht gilt, gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $s > 0$ sodass $|f(z) - w| > s$ für alle z mit $0 < |z| < r$ gilt. Die Funktion $1/(f(z) - w)$ ist damit eine holomorphe Funktion auf $D_r(0) \setminus \{0\}$, die holomorph und beschränkt ist.

Nach Lemma 11 gibt es eine holomorphe Fortsetzung F von f auf $D_r(0)$. Wir können demnach $F(z) = z^k g(z)$ mit $g(0) \neq 0$ schreiben. Das bedeutet, dass $f(z) = w + 1/F(z) = z^{-k}(wz^k + g(z)^{-1})$, und $z^k f(z)$ ist damit holomorph in einer Umgebung von 0. □

Definition 12. Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann ist p eine essentielle Singularität von f wenn i) in Satz 8 gilt, und ein Pol der Ordnung k wenn ii) in Satz 8 gilt.

Bemerkung 1. Ein Pol der Ordnung 0 ist damit eine hebbare Singularität.

Eine Möglichkeit, Pole zu erkennen, ist das Wachstumsverhalten der Funktion an einer isolierten Singularität zu betrachten.

Lemma 13. *Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann ist p ein Pol der Ordnung k genau dann, wenn $\lim_{z\to p} |z^{k-1} f(z)| = \infty$ und $\lim_{z\to p} z^k f(z) \in \mathbb{C}$ existiert. Insbesondere ist p ein Pol positiver Ordnung genau dann, wenn $\lim_{z\to p} |f(z)| = \infty$ gilt, und eine hebbare Singularität, wenn $\lim_{z\to p} |f(z)|$ existiert und endlich ist.*

Übung 4. Beweise Lemma 13.

Beispiel 2. Die Funktion $e^{-1/z}$ hat eine essentielle Singularität an der Stelle 0, da

$$\lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0+} e^{-1/t} = 0, \qquad \lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0+} |e^{-1/(it)}| = 1,$$

und damit $\lim_{z\to 0} |e^{-1/z}|$ nicht existiert.

Übung 5. Sei p ein Polynom vom Grad k. Zeige, dass $p(1/z)$ einen Pol der Ordnung k im Ursprung hat.

Übung 6. Sei f eine holomorphe Funktion mit einer Nullstelle der Ordnung k im Punkt p. Zeige, dass $1/f(z)$ einen Pol der Ordnung k an der Stelle p hat.

Übung 7. Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann hat $g(z) = 1/f(z)$ eine hebbare Singularität an der Stelle p, wenn p ein Pol der Ordnung $k \geq 1$ ist, und $g(z)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung k in diesem Punkt. Wenn p eine essentielle Singularität von f ist, so auch von g.

Definition 14. f ist eine meromorphe Funktion auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ wenn es eine diskrete Menge von Punkten $p_j \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$, gibt, sodass f auf $\Omega \setminus \{p_j : j \in \mathbb{N}\}$ ist und f an jedem p_j höchstens einen Pol besitzt. Die Menge aller meromorphen Funktionen auf Ω wird mit $\mathcal{M}(\Omega)$ bezeichnet.

Übung 8. $\mathcal{M}(\Omega)$ ist ein Körper, welcher $\mathcal{H}(\Omega)$ enthält. Zeige, dass $\mathcal{M}(\Omega)$ der Quotientenkörper von $\mathcal{H}(\Omega)$ ist.

3. Die Laurententwicklung und das Residuum

Eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle p lässt sich dort in eine Laurentreihe entwickeln.

Definition 15. Eine (formale) Laurentreihe um $p \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j (z-p)^j.$$

Die Summe $\sum_{j<0} a_j (z-p)^j$ ist der Hauptteil der Laurentreihe an der Stelle p.

Wir betrachten zunächst die Laurentreihenentwicklung einer holomorphen Funktion an einer isolierten Singularität.

Lemma 16. *Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $R > 0$ und eindeutig bestimmte $a_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft dass*

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j (z-p)^j, \quad 0 < |z-p| < R,$$

wobei die Summe gleichmässig auf kompakten Teilmengen von $0 < |z-p| < R$ konvergiert. Die a_j erfüllen folgende Abschätzung: für jedes r mit $0 < r < R$ gibt es ein $M = M_r$, sodass $|a_j| \leq \frac{M}{r^j}$ ist.

Proof. Wie üblich nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $p = 0$ ist; wir nehmen an, dass f auf einer Scheibe mit dem Radius R um 0 definiert ist. Wir schreiben zunächst formal

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{f(\zeta)}{1-\frac{z}{\zeta}} = f(\zeta)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}},$$

und analog

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\frac{f(\zeta)}{1-\frac{\zeta}{z}} = -f(\zeta)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\zeta^j}{z^{j+1}},$$

wobei die erste Summe auf kompakten Teilmengen von $|z| < |\zeta|$ und die zweite Summe auf kompakten Teilmengen von $|\zeta| < z$ gleichmässig konvergiert.

Für fixe $0 < \varepsilon < s < R$ und z mit $\varepsilon < |z| < s$ können wir nach Satz 7

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD_s(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{bD_\varepsilon(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

schreiben. Wir benützen nun die obigen Reihenentwicklungen für die Integranden und erhalten

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j\geq 0}\left(\int_{bD_s(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}\, d\zeta\right) z^j + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j\geq 0}\left(\int_{bD_\varepsilon(0)} f(\zeta)\zeta^j\, d\zeta\right)\frac{1}{z^{j+1}} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{bD_\varepsilon(0)} f(\zeta)\zeta^{-j-1}\, d\zeta\right) z^j, \end{aligned}$$

wobei wir das Integral über $bD_s(0)$ durch das Integral über $bD_\varepsilon(0)$ ersetzt haben (warum ist das möglich?). Die Koeffizienten in der Laurententwicklung sind daher durch

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{bD_\varepsilon(0)} f(\zeta)\zeta^{-j-1}\, d\zeta \tag{1}$$

gegeben, und erfüllen damit die folgende Abschätzung: Für jedes r mit $0 < r < R$ gibt es ein $M = M_r$ sodass $|a_j| \leq \frac{M}{r^j}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ ist. □

Bemerkung 2. Die Abschätzung für die a_j erlaubt folgende Interpretation: Es gibt ein $R > 0$ und holomorphe Funktionen g auf $D_R(0)$ und h auf $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$ sodaß $f(z) = g(z) + h(\frac{R^2}{z})$ für $|z| < R$ ist.

Übung 9. Beweise die vorangehende Bemerkung.

Übung 10. Zeige, dass die Menge der formalen Laurentreihen $\mathbb{C}[[z, 1/z]]$ um $p \in \mathbb{C}$ ein Körper ist. Die Menge der Laurentreihen welche die Konvergenzabschätzung (für jedes r mit $0 < r < R$ gibt es ein $M = M_r$, sodass $|a_j| \leq \frac{M}{r^j}$ ist) für ein $R > 0$ erfüllen ist ein Unterkörper.

Allgemeiner kann man holomorphe Funktionen in Kreisringen in Laurentreihen entwickeln, was manchmal hilfreich ist.

Lemma 17. *Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Kreisring $D_{r,s}(p) = \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z - p| < s\}$. Dann existieren eindeutig bestimmte $a_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \mathbb{Z}$ sodass*

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j z^j, \quad r < |z - p| < s$$

gilt, und die Summe konvergiert gleichmässig auf kompakten Teilmengen von $D_{r,s}(p)$.

Übung 11. Beweise Lemma 17 (folge dem Beweis von Lemma 16).

Die Laurentreihenentwicklung hängt vom Entwicklungsbereich ab, wie die folgende Übung zeigt.

Übung 12. Finde die Laurentreihenentwicklung von $f(z) = z^{-1} + (z-1)^{-1} + (z-2)^{-1}$ auf $D_{0,1}(0)$, $D_{1,2}(0)$, und $D_{2,\infty}(0)$.

Definition 18. Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle p. Dann ist das Residuum $\operatorname{res}_p f$ von f an der Stelle p der Koeffizient a_{-1} von $1/z$ in der Laurentreihenentwicklung von f um p.

Übung 13. Muss erst neu formuliert werden.

Die folgende Beobachtung ist die Grundlage des Residuensatzes:

Lemma 19. *Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität an der Stelle $p \in \mathbb{C}$. Dann gilt für kleine $\varepsilon > 0$*

$$\int_{bD_\varepsilon(p)} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}_p f.$$

Proof. Wir entwickeln f in eine Laurentreihe um p,

$$f(z) = \sum_j a_j (z-p)^j.$$

Nachdem die Summe auf der kompakten Menge $bD_\varepsilon(p)$ gleichmässig konvergiert, haben wir

$$\int_{bD_\varepsilon(p)} f(\zeta) d\zeta = \sum_j a_j \int_{bD_\varepsilon(p)} (\zeta - p)^j \, d\zeta = 2\pi i a_{-1},$$

da $(\zeta - p)^j$ für $j \neq -1$ eine Stammfunktion besitzt, und das Integral damit verschwindet. □

4. Der Residuensatz

Um uns dem Residuensatz zu nähern, betrachten wir zunächst die folgende Frage: Was passiert, wenn wir das Konturintegral einer holomorphen Funktion verändern, indem wir die Kontur über eine isolierte Singularität dieser Funktion an einer Stelle p verformen? Die Antwort wird durch Lemma 19 gegeben: Die Differenz der Integrale ist gerade durch $2\pi i \operatorname{res}_p f$ gegeben.

Genauere Auskunft gibt uns der Residuensatz:

Satz 9. *Sei Γ ein nullhomologer Zykel in Ω und f eine holomorphe Funktion, die in Ω nur isolierte Singularitäten p_j $(j \in \mathbb{N})$ besitzt, und kein p_j auf Γ liegt. Wir nehmen an, dass die Menge $\{j \in \mathbb{N} \colon \operatorname{ind}_\Gamma p_j \neq 0\}$ endlich ist. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_j (\operatorname{ind}_\Gamma p_j)(\operatorname{res}_{p_j} f).$$

Proof. Wir wählen ein kleines $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\bigcup_{\operatorname{ind}_\Gamma p_j \neq 0} D_\varepsilon(p_j) \cap \{p_j \colon \operatorname{ind}_\Gamma(p_j) = 0\} = \emptyset$$

ist und betrachten den Zykel $\tilde\Gamma = \sum_j (\operatorname{ind}_\Gamma p_j) bD_\varepsilon(p_j)$. Dann sind Γ und $\tilde\Gamma$ in $\tilde\Omega = \Omega \setminus \{p_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ homolog, und nach Satz 7 und Lemma 19 gilt

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\tilde\Gamma} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_j \operatorname{ind}_\Gamma p_j \int_{bD\varepsilon} f(\zeta)/, d\zeta = 2\pi i \sum_j (\operatorname{ind}_\Gamma p_j)(\operatorname{res}_{p_j} f).$$

□

Bemerkung 3. Es ist natürlich, zu fragen, ob die Endlichkeitsbedingung in Satz 9 notwendig ist. Wir werden später sehen, daß die Residuen keinen Wachstumsbedingungen unterliegen; deswegen sind wenn unendlich viele Singularitäten vorliegen immer gesonderte Konvergenzbetrachtungen notwendig.

Beispiel 3. Wir haben $\int_\mathbb{R} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ (Übung: berechne das Integral mit elementarer Differentialrechnung). Dazu betrachten wir die Kontur Γ_R, welche den Halbkreis mit Radius R um 0 beschreibt; diese wird durch 2 offene Kurven beschrieben, die Strecke von $-R$ nach R und die Kurve C_R, gegeben durch Re^{it} für $0 \leq t \leq \pi$. Die Funktion $(1+z^2)^{-1}$ hat eine Singularität innerhalb dieser Kontur, an der Stelle $z = i$, mit Residuum

$$\operatorname{res}_i (1+z^2)^{-1} = \operatorname{res}_i (z+i)^{-1}(z-i)^{-1} = \frac{1}{2i} \operatorname{res}_i (z-i)^{-1} = \frac{1}{2i}.$$

Es folgt, dass

$$\pi = 2\pi i \operatorname{res}_i (1+z^2)^{-1} = \int_{\Gamma_R} \frac{d\zeta}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} \frac{d\zeta}{1+z^2},$$

für jedes $R > 1$. Wir lassen nun $R \to \infty$; das zweite Integral strebt dann gegen 0 und die Behauptung folgt.

5. Einige Anwendungsbeispiele für den Residuensatz

5.1. **Trigonometrische Integrale.**

Beispiel 4. Wir berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}.$$

Dazu setzen wir $\cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, und ersetzen die Integration durch ein Kurvenintegral über den Einheitskreis, sodaß $izd\theta = dz$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{-2idz}{z^2+2az+1}.$$

Das letzte Integral berechnen wir mit Hilfe des Residuensatzes. Die Nullstellen von $z^2+2az+1$ sind

$$-a+\sqrt{a^2-1}, \quad -a-\sqrt{a^2-1};$$

wenn $|a|<1$, so liegen die Nullstellen am Einheitskreis, und wir können den Residuensatz nicht anwenden. Ist $a>1$, so ist $-1 < -a+\sqrt{a^2-1} < 1$, und wir berechnen

$$\int_{|z|=1} \frac{-2idz}{z^2+az+1} = 4\pi \operatorname{res}_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} \frac{1}{(z-(-a+\sqrt{a^2-1}))(z-(-a-\sqrt{a^2-1}))} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Eine ähnliche Rechnung führt auch im Fall $a<-1$ zum Ziel, das Ergebnis ist dann

$$\int_{|z|=1} \frac{-2idz}{z^2+az+1} = -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Diese Art von Substitutionen ist bei allen Integralen von rationalen Funktionen (mit nicht verschwindendem Nenner) in $\sin\theta$ und $\cos\theta$ ziehlführend.

Übung 14. Berechne $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$.

Übung 15. Berechne $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

5.2. **Uneigentliche Integrale über die reelle Achse.**

Beispiel 5. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}.$$

Dazu benutzen wir eine Integrationskurve, die von 0 auf der reellen Achse bis $R>0$ verläuft, gefolgt vom Kreissegment auf dem Kreis vom Radius R vom Winkel 0 bis $e^{i\frac{\pi}{n}}$, gefolgt vom Strahl mit diesem Winkel bis 0 (also ein Tortenstück). Der einzige Pol von $1/(1+z^{2n})$ in diesem Segment ist für $z = e^{i\frac{\pi}{2n}}$. Wir berechnen das Residuum mit Hilfe der Substitution $z = e^{i\frac{\pi}{2n}}w$:

$$\operatorname{res}_{z=e^{i\frac{\pi}{2n}}} \frac{1}{1+z^{2n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}} \operatorname{res}_{w=1} \frac{1}{1-w^{2n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}} \operatorname{res}_{w=1} \frac{1}{(1-w)(1+w+\cdots+w^{2n-1})} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{2n}}}{2n}.$$

Daher ist nach einer einfachen Abschätzung des Integrals über das Kreissegment

$$\frac{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = -2\pi i \frac{e^{i\frac{\pi}{2n}}}{2n}$$

oder nach einer elementaren Umformung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Beispiel 6. Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Dazu verwenden wir als Integrationskurve die Strecke von $-R$ nach R auf der reellen Achse, gefolgt vom Halbkreis γ_R in der oberen Halbebene. Da

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| = 0,$$

erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Übung 16. Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$.

Übung 17. Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$. (Verwende $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$)

5.3. **Fourier Transformationen.** Ein Spezialfall der vorangehenden Integrale ist die Berechnung der Fouriertransformation

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx}\,dx.$$

Wenn f durch die Einschränkung einer analytischen Funktion auf die reelle Achse gegeben ist, kann man oft den Residuensatz anwenden, um $\hat{f}$ zu berechnen.

Beispiel 7. Wir berechnen die Fouriertransformierte von $f(x) = (1+x^2)^{-1}$. Dazu nehmen wir zunächst an, dass $t < 0$ ist, und verwenden den rechteckigen Pfad, der die Punkte $(-R,0)$, $(R,0)$, (R,S), und $(-R,S)$ verbindet. Für $R > 0$ und $S > 1$ haben wir dann

$$\begin{aligned}2\pi i \operatorname{res}_{z=i} f(z)e^{-itz} = &\int_{-R}^{R} f(x)e^{-itx}\,dx + \int_0^S f(R+iy)e^{-it(R+iy)}\,dy \\ &+ \int_R^{-R} f(x+iS)e^{-it(x+iS)}\,dx + \int_S^0 f(-R+iy)e^{-it(-R+iy)}\,dy.\end{aligned}$$

Wenn wir nun $S \to \infty$ gehen lassen, verschwindet das dritte Integral in dieser Summenzerlegung, da

$$\left| \int_R^{-R} f(x+iS)e^{-it(x+iS)}\,dx \right| \le \frac{CRe^{tS}}{S^2},$$

und $t < 0$ angenommen war. Wir betrachten nun das zweite Integral und lassen in diesen zunächst $S \to \infty$ und dann $R \to \infty$. Wir erhalten für den ersten Grenzübergang das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(R+iy)e^{-it(R+iy)}\,dy$, und schätzen ab:

$$\left| \int_0^\infty f(R+iy)e^{-it(R+iy)}\,dy \right| \le \frac{C}{R^2} \int_0^\infty e^{ty}\,dy = \frac{C}{R^2 t} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Eine ähnliche Abschätzung lässt uns den Grenzübergang im vierten Integral durchführen. Wir erhalten

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx = \sqrt{2\pi} i \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{-itz}}{1+z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^t, \quad t < 0.$$

Falls $t > 0$, so müssen wir statt einem Rechteck in der oberen Halbebene eines in der unteren Halbebene verwenden, also mit $S < 0$ arbeiten. Exakt dieselben Argumente liefern dann

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx = -\sqrt{2\pi} i \operatorname{res}_{z=-i} \frac{e^{-itz}}{1+z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-t} \quad t > 0.$$

Für $t = 0$ erinnern wir an Beispiel 3, und erhalten

$$\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Zusammengefasst ist $\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|t|}$.

Übung 18. Finde die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{x-i}$.

5.4. **Summation unendlicher Reihen.** Oft kann man den Residuensatz verwenden, um eine Reihe zu summieren, indem man die Reihenterme als die Residuen einer Funktion mit passenden Wachstumseigenschaften realisiert.

Beispiel 8. Wir bestimmen die Summe von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Dazu verwenden wir die Funktion $\pi \cot(\pi z)$. Diese hat einfache Pole an allen Stellen $n \in \mathbb{Z}$; das Residuum an diesen Stellen berechnet sich durch

$$\operatorname{res}_{z=n} \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = 1.$$

Wir benutzen nun

Übung 19. Auf dem Rechteck γ_N, welches symmetrisch um den Ursprung liegt, die reelle Achse in den Punten $-N-1/2$ und $N+1/2$, und die imaginäre Achse in den Punkten $-iN$ und iN schneidet, ist $|\cot(\pi z)| \leq 2$.

Damit sehen wir, dass $\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} \pi \frac{\cot \pi z}{z^2}\, dz = 0$; auf der anderen Seite gilt

$$\int_{\gamma_N} \pi \frac{\cot \pi z}{z^2}\, dz = 2\pi i \sum_{n \leq N} \operatorname{res}_{z=n} \pi \frac{\cot \pi z}{z^2} = 4\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \pi \frac{\cot \pi z}{z^2}.$$

Eine einfache Rechnung liefert uns nun

$$\operatorname{res}_{z=0} \pi \frac{\cot \pi z}{z^2} = \frac{-\pi^2}{3}.$$

Wenn wir nun $N \to \infty$ lassen, erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Übung 20. Bestimme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. (Dazu verwende eine Modifikation von $\pi \cot(\pi z)$, um die Vorzeichen zu erhalten)

Übung 21. Bestimme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

6. Einfacher Zusammenhang

In diesem Kapitel wollen wir uns dem Thema, wie man Fortsetzungen von holomorphen Funktionen konstruieren kann, in einem speziell einfachen Fall nähern. Wir fragen uns, wie ein Gebiet Ω (also eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$) aussehen muss, um auf ihm einen wohlbestimmten Logarithmus einer nichtverschwindenden holomorphen Funktion definieren zu können.

Eine erste Beobachtung ist, dass die Existenz eines wohlbestimmten Logarithmus von f gleichwertig mit der Existenz einer Stammfunktion von $f'/f = g$ ist. Wählen wir ein fixes $z_0 \in \Omega$ und für jedes $z \in \Omega$ einen Pfad γ_z, der z_0 mit z verbindet, so können wir einen Ansatz für eine Stammfunktion wie folgt machen:

$$G(z) = \int_{\gamma_z} g(\zeta)\, d\zeta.$$

Leider ist dadurch nicht garantiert, dass die so definierte Funktion G auch tatsächlich differenzierbar ist–als Beispiel betrachten wir $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Funktion $1/z$. Falls G allerdings vom gewählten Pfad γ_z nicht abhängt, also für einen anderen Pfad $\tilde{\gamma}_z$ gilt dass

$$\int_{\gamma_z} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_z} g(\zeta)\, d\zeta,$$

ist G klarerweise differenzierbar–um die Differenzierbarkeit an einer Stelle $w_0 \in \Omega$ zu überprüfen, schreiben wir

$$G(z) = \int_{\gamma_{w_0}} g(\zeta)\, d\zeta + \int_{w_0}^{z} g(\zeta)\, d\zeta,$$

wo das zweite Integral über die Strecke von w_0 nach z verläuft (solange z nahe genug an w_0 ist, bleiben wir ja in Ω). Dann haben wir

$$\lim_{z\to w_0} \frac{G(z) - G(w_0)}{z - w_0} = g(w_0),$$

nach einer altbekannten Rechnung, und somit ist G differenzierbar.

Die Vorrausetzung, dass das Integral wegunabhängig ist, bedeutet gerade, dass für den geschlossenen Pfad $\Gamma = \gamma_z - \tilde{\gamma}_z$

$$\int_{\Gamma} g(\zeta)\, d\zeta = 0$$

gilt. Insgesamt muss also, um eine Stammfunktion nach dem obigen Ansatz zu definieren, dies für *alle* geschlossenen Pfade in Ω gelten. Hat g umgekehrt eine Stammfunktion, so hängt das Integral über einen beliebigen Pfad γ nur von dessen Anfangs- und Endpunkt ab, da

$$\int_{\gamma} g(\zeta)\, d\zeta = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0))$$

ist.

Wir fassen die vorangehenden Betrachtungen kurz zusammen:

Lemma 20. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, g eine holomorphe Funktion in Ω. Dann gibt es eine holomorphe Stammfunktion G zu g auf Ω genau dann, wenn*

$$\int_\Gamma g(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für alle geschlossenen Pfade in Ω ist.

Ist f eine auf Ω nichtverschwindende holomorphe Funktion, so gibt es eine holomorphe Funktion G mit $e^G = f$ genau dann, wenn

$$\int_\Gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = 0$$

für alle geschlossenen Pfade Γ in Ω gilt.

Der Nachteil dieser Bedingung ist, dass sie von der Funktion g (beziehungsweise f) abhängt–wir hätten gerne eine Bedingung, die keine explizite Kenntnis der Funktion verlangt, um auf die Existenz einer Stammfunktion oder eines Logarithmus zu schliessen, also eine Bedingung, die an das *Gebiet* gestellt wird. Hier hilft uns wiederum der Cauchy'sche Integralsatz 5, nach dem das Integral einer holomorphen Funktion unter Homotopien invariant ist. Wenn nun jeder geschlossene Pfad in Ω zu einem Punkt homotop ist (wir sagen dann, dass Ω einfach zusammenhängend ist), so ist die Bedingung von Lemma 20 für jede holomorphe Funktion g (beziehungsweise für jede nichtverschwindende holomorphe Funktion f) erfüllt, da das Integral über einen konstanten Pfad verschwindet.

Wir könnten allerdings auch die Homologievariante des Cauchy'schen Integralsatzes 7 anwenden, und vorraussetzen, dass alle Zykel in Ω nullhomolog sind. Diese Vorraussetzung wird durch den einfachen Zusammenhang von Ω impliziert, wie wir schon bemerkt haben: Angenommen, dass es einen Zykel Γ in Ω gibt, der *nicht* in Ω nullhomolog ist, so gibt es einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ mit $\operatorname{ind}_{z_0} \Gamma \neq 0$. Wir betrachten nun die auf Ω holomorphe Funktion $g_0(z) = \frac{1}{z-z_0}$. Nach dem Residuensatz 9 gilt nun, dass

$$\int_\Gamma g_0(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{ind}_{z_0} \Gamma \neq 0.$$

Insbesondere ist der Pfad Γ nicht nullhomotop in Ω. Übrigens gilt die Umkehrung dieser Beobachtung nicht.

Übung 22. Finde ein Gebiet Ω und einen Pfad Γ in Ω, welcher in Ω nullhomolog, aber nicht nullhomotop ist.

Trotzdem ist Ω aber nicht einfach zusammenhängend, wenn nicht jeder Zykel in Ω nullhomolog ist. In diesem Fall muss $\mathbb{C} \setminus \Omega$ nämlich auch kompakte Zusammenhangskomponenten haben: sei Γ ein Zykel, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ mit $\operatorname{ind}_{z_0} \Gamma \neq 0$. Da $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ in offene Mengen zerfällt, auf denen $\operatorname{ind}_z \Gamma$ konstant ist, und auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ $\operatorname{ind}_z \Gamma = 0$ ist, ist die Zusammenhangskomponente von z_0 in $\mathbb{C} \setminus \Omega$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Ω hat in diesem Fall also "Löcher", was die Existenz von nicht nullhomotopen Pfaden impliziert.

Wir können nun zusammenfassen:

Satz 10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
- i) *Ω ist einfach zusammenhängend;*
- ii) *jeder Zykel Γ in Ω ist nullhomolog;*
- iii) *jede holomorphe Funktion g in Ω besitzt eine in Ω holomorphe Stammfunktion G;*
- iv) *jede nichtverschwindende holomorphe Funktion f besitzt einen Logarithmus;*
- v) *für jeden Zykel Γ in Ω und jede holomorphe Funktion g in Ω gilt*

$$\int_\Gamma g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Wir haben diese Äquivalenzen im vorangehenden fast schon bewiesen, mit der Ausnahme von iv) (das im Moment nur impliziert wird). Um den Kreis zu schliessen, fehlt uns also folgende

Übung 23. Zeige, dass iv) im vorangehenden Satz ii) impliziert.

Unser nächstes Ziel ist es, eine weitere Äquivalenz zu Satz 10 hinzuzufügen: Es gibt eine bijektive holomorphe Abbildung $\Omega \to \{|z| < 1\}$ zwischen Ω und der Einheitskreisscheibe. Um so eine Abbildung zu konstruieren, benötigen wir einige Vorbereitungen.

7. Normale Familien und der Satz von Montel

Wir erinnern daran, dass eine Familie $\mathcal{F}$ von stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum X *normal* ist, wenn jede Folge in $\mathcal{F}$ eine auf kompakten Teilmengen von X gleichmässig konvergente Teilfolge hat.

Das grundlegende Mittel, um Normalität festzustellen, ist der Satz von Arzela-Ascoli:

Satz 11. *Sei X ein kompakter, separabler topologischer Raum, $\mathcal{F} \subset C(X)$. Wenn $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist, dann ist $\mathcal{F}$ normal.*

Übung 24. Wiederhole den Beweis von Satz 11.

Der Satz von Montel sagt uns, dass die gleichgradige Stetigkeit von Familien holomorpher Funktionen besonders einfach festzustellen ist.

Satz 12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$. Wenn $\mathcal{F}$ gleichmässig beschränkt auf kompakten Teilmengen von Ω ist, dann ist $\mathcal{F}$ normal.*

Proof. Nach Satz 11 und dem Weierstrass'schen Konvergenzsatz (der gleichmässige Grenzwert holomorpher Funktionen ist holomorph) ist es genug zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig auf kompakten Teilmengen von Ω ist. Sei $K \subset \Omega$ also kompakt. Wir wählen $r > 0$ mit $\overline{D_{2r}(p)} \subset \Omega$ für $p \in K$ und betrachten für $s < r$ und $f \in \mathcal{F}$, $z, w \in D_s(p)$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - p| = 2r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - p| = 2r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta \right| \\ &\leq |z - w| \frac{\max_{\zeta \in K_{2r}} |f(\zeta)|}{r}. \end{aligned}$$

Wir beachten nun, dass $K_{2r} = \{z \in \Omega \colon \max_{p \in K} |z - p| \leq 2r\}$ wieder kompakt ist; damit ist $\mathcal{F}$ auf K_{2r} gleichmässig beschränkt, und unsere obige Abschätzung zeigt, dass für $z, w \in K$, $|f(z) - f(w)| \leq C|z - w|$ für ein $C > 0$, und zwar für alle $z, w \in K$ mit $|z - w| < s < r$. Insbesondere ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig auf kompakten Teilmengen von Ω. □

8. Der Satz von der offenen Abbildung

Wir benötigen auch den folgenden Satz, der besagt, dass analytische Funktionen offene Abbildungen sind.

Satz 13. *Sei f eine holomorphe Funktion auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dann gibt es für alle $z \in \Omega$ und für jedes hinreichend kleine $s > 0$ ein $r > 0$ sodass $D(f(z), r) \subset f(D(z, s))$. Insbesondere ist $f(U)$ offen.*

Wir beweisen den Satz von der offen Abbildung mit Hilfe des Satzes von Rouchè:

Satz 14. *Sei γ eine einfache geschlossene Kurve, die ein Gebiet Ω berandet, f, g holomorphe Funktionen in einer Umgebung von $\bar{\Omega}$, mit $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ für $z \in \gamma$. Dann ist die Anzahl der Nullstellen Z_f von f in Ω gleich der Anzahl der Nullstellen Z_g von g in Ω.*

Proof. Wir bemerken zunächst, dass nach Vorraussetzung sowohl g als auch f auf γ nicht verschwinden. Also sind sowohl f als auch g nichttrivial; die Anzahl der Nullstellen in Ω ist also endlich. Die Anzahl der Nullstellen von f wird nach dem Residuensatz mit Hilfe des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = Z_f$$

gezählt. Nachdem $|f - g| < |f|$ auf γ ist, gilt für $h = g/f$ $|1 - h(z)| < 1$ für $z \in \gamma$. Wir können also in einer Umgebung von γ eine Stammfunktion für $\log h$ wählen. Damit ist aber

$$0 = \int_\gamma \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\, d\zeta - \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta,$$

also $Z_f = Z_g$. □

Beweis von Satz 13. Sei $z \in \Omega$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $f(z) = 0$ ist. Wenn f nichtkonstant ist, so gibt es ein $s_0 > 0$, sodass $f(\zeta) \neq 0$, wenn $0 < |z - \zeta| \leq s_0$ (da die Nullstellen von f isoliert sind). Sei $r(s) = \min_{|\zeta - z| = s} |f(\zeta)|$. Nach dem Satz von Rouchè haben $f(\zeta)$ und $f(\zeta) - w$ dieselbe Anzahl von Nullstellen in $D_s(z)$, wenn $|w| < r(s)$. Also ist $D(0, r(s)) \subset f(D(z, s))$. □

9. Injektive holomorphe Funktionen und der Satz von Hurwitz

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass der Grenzwert einer Folge injektiver holomorpher Funktionen entweder konstant oder wieder injektiv ist. Der erste Schritt zu diesem als Satz von Hurwitz bekannten Sachverhalt ist die folgende Beobachtung.

Lemma 21. *Sei f_n eine Folge holomorpher Funktionen auf dem Gebiet Ω, welche in Ω nicht verschwinden, und gleichmässig auf kompakten Teilmengen gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist entweder $f = 0$ oder f verschwindet nicht in Ω. Genauer gesagt: wenn f_n eine beliebige Folge holomorpher Funktionen ist, welche gleichmässig auf kompakten Teilmengen gegen eine Funktion f konvergiert, und $D_r(z)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{D_r(z)} \subset \Omega$ ist, mit $f(\zeta) \neq 0$ für $|z - \zeta| = r$, dann haben f und f_n für hinreichend grosse n dieselbe Anzahl von Nullstellen in $D_r(z)$.*

Proof. Wenn f nicht identisch verschwindet, sind die Nullstellen von f diskret in Ω. Sei z ein Punkt in Ω und $r > 0$ mit $\overline{D_r(z)} \subset \Omega$ und $f(\zeta) \neq 0$ für $|\zeta - z| = r$. Sei $\varepsilon = \min_{|\zeta - z| = r} |f(\zeta)| > 0$. Nachdem $\lim_n f_n = f$ ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon/2 < |f(\zeta)|$ für $|z - \zeta| = r$. Nach dem Satz von Rouchè 14 haben daher f_n und f dieselbe Anzahl von Nullstellen in $D_r(z)$. □

Satz 15. *Sei f_n eine Folge injektiver holomorpher Funktionen auf dem Gebiet Ω, welche gleichmässig auf kompakten Teilmengen gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f konstant oder injektiv.*

Proof. Angenommen, f ist nicht injektiv. Es gibt also zwei Punkte $p, q \in \Omega$ sodass $f(p) = f(q)$; ohne Beschränkund der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f(p) = f(q) = 0$ ist. Wir betrachten nun das Gebiet $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \{q\}$. Nach Vorraussetzung konvergiert f_n auch auf kompakten Teilmengen von $\tilde{\Omega}$ gegen f, also auch $\tilde{f}_n(z) = f_n(z) - f_n(q)$. Wenn f nicht konstant ist, gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{D_r(p)} \subset \tilde{\Omega}$ sodass $f(\zeta) \neq 0$ für $0 < |\zeta - p| \leq r$. Nach Lemma 21 haben also für genügend grosse n $\tilde{f}_n$ und f dieselbe Anzahl von Nullstellen in $D_r(p)$; i.e. es gibt ein p_n mit $f_n(p_n) = f_n(q)$. Also sind die f_n für genügend grosse n nicht injektiv. □

10. Das Schwarz'sche Lemma und Automorphismen der Kreisscheibe

Lemma 22. *Sei f eine holomorphe Funktion auf $D_1(0)$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| < 1$ für $|z| < 1$. Dann ist $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$, und weiters gilt $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in D_1(0)$ mit $z \neq 0$ oder $|f'(0)| = 1$ genau dann, wenn $f(z) = \lambda z$ mit $|\lambda| = 1$.*

Proof. Da $f(0) = 0$, ist die Funktion $g(z) = f(z)/z$ holomorph auf $D_1(0)$ (d.h., die Singularität an der Stelle 0 ist hebbar). Weiters gilt für jedes $r < 1$, dass $|g(z)| \leq 1/r$ wenn $z \in D_r(0)$; also ist $|g(z)| \leq 1$ für $z \in D_1(0)$, und damit $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$. Das Maximumsprinzip bedingt nun, dass g konstant ist, falls $|g(z)| = 1$ für ein $z \in D_1(0)$; in diesem Fall ist also $f(z) = \lambda z$ für ein λ mit $|\lambda| = 1$. □

Eine wichtige Folgerung aus diesem Lemma ist, dass eine bijektive holomorphe Funktion $\varphi\colon D_1(0) \to D_1(0)$ mit $\varphi(0) = 0$ notwendigerweise eine Rotation ist, also $\varphi(z) = \lambda z$ für ein λ mit $|\lambda| = 1$ (das folgt aus der Anwendung des Schwarz'schen Lemmas auf φ und φ^{-1}). Um die gesamten Automorphismen der Kreisscheibe zu bestimmen, müssen wir also nur jene Automorphismen finden, die Punkte bewegen.

Betrachten wir also die Abbildungen

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in D_1(0).$$

Diese haben die Eigenschaft, dass $\varphi(a) = 0$, und $\varphi(0) = -a$; weiters ist $|\varphi(z)| = 1$ für $|z| = 1$. Also bildet φ die Einheitskreisscheibe auf sich selber ab. Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$\varphi_a(\varphi_{-a}(z)) = \frac{\frac{z+a}{1+\bar{a}z} - a}{1 - \bar{a}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}} = z;$$

damit ist φ_a bijektiv, und es folgt, dass ein beliebiger Automorphismus der Kreisscheibe $f(z)$ sich als $f(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ für ein $a \in D_1(0)$ schreiben lässt.

Übung 25. Das Schwarz'sche Lemma lässt sich nun wie folgt interpretieren: Wenn $f\colon D_1(0) \to D_1(0)$ eine holomorphe Abbildung ist, so ist

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|,$$

und

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2};$$

wenn in einer der beiden Ungleichungen für ein Paar von Punkten $z, w \in D_1(0)$ bzw. für ein $z \in D_1(0)$ Gleichheit besteht, so ist f ein Automorphismus der Kreisscheibe. (Diese Aussage ist das *Schwarz-Pick Lemma*).

Definition 23. Für zwei Punkte $z, w \in D_1(0)$ ist die hyperbolische Distanz $d(z, w)$ definiert durch

$$d(z, w) = 2\mathrm{artanh}\left(\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|\right).$$

Übung 26. Interpretiere das Schwarz-Pick Lemma mit Hilfe von Definition 23.

11. Der Riemann'sche Abbildungssatz

Satz 16. *Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $a \in \Omega$. Dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $g\colon \Omega \to D_1(0)$ mit $g(a) = 0$ und $g'(a) > 0$.*

Proof. Wir definieren

$$\mathcal{F} = \{f\colon \Omega \to D_1(0), f(a) = 0, f \text{ injektiv}\}.$$

Dann ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$: Sei dazu $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Da Ω einfach zusammenhängend ist, gibt es eine holomorphe Funktion g auf Ω mit $g(z)^2 = z - w$; man überprüft leicht, dass g injektiv ist. Wenn $\zeta \in g(\Omega)$, so ist $-\zeta \notin g(\Omega)$ (da sonst, falls $g(z_1) = \zeta$ und $g(z_2) = -\zeta$ gelten muss, dass $z_1 - a = g(z_1)^2 = g(z_2)^2 = z_2 - a$, somit $\zeta = -\zeta$ und $\zeta = 0 \notin g(\Omega)$). Nach dem Satz von der offenen Abbildung (Satz 13) ist $g(\Omega)$ offen; damit ist auch $-g(\Omega)$ offen, und nach der Beobachtung vorher ist für einen Kreis $D_r(b) \subset -g(\Omega)$ auch $g(\Omega) \cap D_r(b) = \emptyset$. Die Abbildung

$$z \mapsto \frac{r}{g(z) - b}$$

ist nun eine injektive Abbildung von Ω nach $D_1(0)$. Nach Zusammensetzung mit einem geeigneten Automorphismus der Kreisscheibe können wir auch annehmen, dass a auf 0 abgebildet wird; also ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Wir setzen nun $M = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(a)| > 0$. Nach dem Satz von Montel (Satz 12) können wir aus jeder Folge f_j mit $f_j \in \mathcal{F}$ eine konvergente Teilfolge auswählen; für den Limes f einer solchen Folge f_j mit $|f_j'(a)| \to M$ gilt nun, dass f nichtkonstant ist (da $|f'(a)| = M > 0$) und damit nach dem Satz von Hurwitz (Satz 15), dass $f \in \mathcal{F}$. Damit ist M ein Maximum, und wir behaupten, dass jedes f mit $|f'(a)| = M$ surjektiv ist.

Wenn so ein f nicht surjektiv ist, so sei $b \in D_1(0)$ mit $b \notin f(\Omega)$. Dann ist $0 \notin \varphi_b \circ f(\Omega)$. Wir wählen eine Wurzel W dieser Funktion, i.e. eine holomorphe Funktion W auf Ω mit $W(z)^2 = \varphi_b \circ f$. Dann ist $g(z) = \varphi_{W(a)} \circ W \in \mathcal{F}$. Da $f = \varphi_{-b} S \circ \varphi_{-W(a)} \circ g$, wo $S(z) = z^2$, und $\varphi = \varphi_{-b} S \circ \varphi_{-W(a)}$ kein Automorphismus der Kreisscheibe ist (aber 0 auf 0 abbildet), gilt nach dem Schwarz'schen Lemma $|\varphi'(0)| < 1$. Damit ist aber $|f'(a)| < |g'(a)|$, also $|f'(a)| < M$. □

Bemerkung 4. Wir haben in Satz 10 vorrausgesetzt, dass Ω einfach zusammenhängend ist. Eine kurze Inspektion des Beweises zeigt, dass wir nur die homologische Trivialität von Ω verwendet haben; der Riemann'sche Abbildungssatz gibt damit einen Beweis, dass homologische Trivialität den einfachen Zusammenhang impliziert.

12. Der Approximationssatz von Runge

Satz 17. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $K^c = \cup_j U_j$ die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten, und $a_j \in U_j$; wenn U_j die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von K^c ist, so wollen wir $a_j = \infty$ zulassen. Dann lässt sich jede Funktion, welche holomorph in einer Umgebung von K ist, gleichmässig auf K durch rationale Funktionen mit Polen in den a_j approximieren.*

Für den Beweis des Satzes benötigen wir das folgende Korollar aus dem Satz von Hahn-Banach.

Korollar 24. *Sei F ein normierter Raum, $E \subset F$ ein Teilraum. Dann ist $f \in \overline{E}$ genau dann, wenn für alle stetigen linearen Funktionale L auf F mit $L|_E = 0$ auch $Lf = 0$ gilt.*

Beweis von Satz 17. Wir wenden Korollar 24 auf $F = C(K)$ (mit der Maximumsnorm) und E den Teilraum der rationalen Funktionen mit Polen in den a_j. Sei L ein stetiges lineares Funktional, welches auf E verschwindet, und f auf $\Omega \supset K$ holomorph. Wir betrachten die Funktion

$$h(\zeta) = L(z \mapsto (\zeta - z)^{-1}).$$

Dann ist h holomorph auf K^c, da sich für jedes $\zeta_0 \in K^c$ und $r > 0$ mit $\overline{D_r(\zeta_0)} \subset K^c$

$$L\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} L\left(\frac{1}{(\zeta_0 - z)^{k+1}}\right)(\zeta - \zeta_0)^k$$

schreiben lässt. Nach Vorraussetzung ist aber $L((a_j - z)^{-k}) = 0$ für alle k, falls $a_j \neq \infty$; damit verschwindet h zu unendlicher Ordnung bei a_j und damit nach dem Identitätssatz auf U_j. Ist $a_j = \infty$, so schreiben wir

$$L\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} L\left(z^{k+1}\right)\frac{1}{\zeta^k},$$

und verwenden dass (wieder nach Vorraussetzung) $L(z^{k+1}) = 0$ für alle k ist; auch hier folgt, dass $h = 0$ auf U_j ist.

Wir wählen nun einen Zykel $\Gamma \subset \Omega \setminus K$ mit $\operatorname{ind}_z \Gamma = 1$ für $z \in K$, und schreiben

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N} \frac{\zeta'_{j,N} f(\zeta_{j,N})}{\zeta_{j,N} - z}$$

mit gleichmässiger Konvergenz der Riemannsummen für $z \in K$. Damit haben wir

$$L(f(z)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \zeta'_{j,N} f(\zeta_{j,N}) L\left(\frac{1}{\zeta_{j,N} - z}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \zeta'_{j,N} f(\zeta_{j,N}) h(\zeta_{j,N}) = 0.$$

□

Übung 27. Zeige, dass es einen Zykel Γ wie im Beweis von Satz 17 benötigt gibt!

Unser nächster Schritt bestet in der Anwendung des vorangehenden Satzes über Approximation durch rationale (also global auf $\mathbb{C}$ definierte) Funktionen auf eine lokalisierte Situation. Hier ist es von Vorteil, die folgende Art der Hüllenbildung für kompakte Mengen $K \subset \Omega$ einzuführen: wir definieren $\hat{K}_\Omega$ als die Menge aller $z \in \Omega$, für die ein "relatives Maximumsprinzip" bezüglich K gilt, d.h.

$$\hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega \colon |f(z)| \le \|f\|_K \text{ für alle } f \in \mathcal{H}(\Omega)\},$$

wobei $\|f\|_K = \max_{z\in K} |f(z)|$ die Maximumsnorm über K ist. Wir nennen eine Menge K holomorph-konvex, (bezüglich Ω), wenn $\hat{K}_\Omega = K$ gilt. (Bemerke: wir haben immer $K \subset \hat{K}_\Omega$ und $\hat{K}_\Omega$ ist holomorph-konvex).

Satz 18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset \Omega$ kompakt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

i) *Jede auf einer Umgebung von K holomorphe Funktion lässt sich durch holomorphe Funktionen auf Ω gleichmässig auf K approximieren;*
ii) *$\hat{K}_\Omega = K$;*
iii) *$\Omega \setminus K$ hat keine in Ω relativ kompakten Zusammenhangskomponenten.*

Proof. Dass iii) i) impliziert, folgt direkt aus Satz 17; da $\Omega \setminus K$ keine in Ω relativ kompakten Zusammenhangskomponenten hat, ist keine der beschränkten Zusammenhangskomponenten von K^c in Ω enthalten, und wir können dementsprechend durch rationale Funktione mit Polen ausserhalb von Ω approximieren.

Wenn iii) nicht gilt, es also eine relativ kompakte Zusammenhangskomponente U von $\Omega \setminus K$ gibt, so ist für jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und jedes $z \in U$ nach dem Maximumsprinzip $|f(z)| \le \|f\|_{bU} \le \|f\|_K$, da $bU \subset K$; somit ist $U \subset \hat{K}_\Omega$, also gilt ii) nicht. Ähnlich können wir sehen, dass auch i nicht gilt: Wenn $z_0 \in U$, so können wir (falls i) erfüllt ist) die in einer Umgebung von K holomorphe Funktion $f(z) = (z - z_0)^{-1}$ gleichmässig durch auf Ω holomorphe Funktionen f_j approximieren. Nach unserer Beobachtung von vorher ist $U \subset \hat{K}_\Omega$, somit folgt aus der gleichmässigen Konvergenz von f_j auf K auch die auf $\bar{U}$ gegen eine Grenzfunktion F. Da $F(z)(z - z_0) = 1$ auf bU, ist $F(z)(z - z_0) = 1$ auf U, was wegen $z_0 \in U$ nicht möglich ist.

Wir zeigen nun noch, dass ii) erfüllt ist, falls die (bereits als äquivalent gezeigten) Bedingungen i) und iii) gelten. Sei dazu $z \in \Omega \setminus K$. Wenn wir eine kleine, abgeschlossene Kreisscheibe D um z wählen, so hat $\Omega \setminus K \cup D$ keine in Ω relativ kompakten Zusammenhangskomponenten, da $\Omega \setminus K$ keine hat. Wir approximieren die auf $K \cup D$ holomorphe Funktion f, welche auf K konstant 0 und auf D konstant 1 ist, durch eine auf Ω holomorphe Funktion g mit $\|f - g\|_{K\cup D} < 1/2$. Dann ist $|g(z)| > 1/2 > \|g\|_K$, also $z \notin \hat{K}_\Omega$. □

Übung 28. Gib eine Bedingung für die kompakte Menge K an, sodass jede in einer Umgebung von K holomorphe Funktion gleichmässig auf K durch Polynome approximierbar ist!

13. Der Satz von Mittag-Leffler

Der Satz von Mittag-Leffler erlaubt es uns, meromorphe Funktionen auf einer offenen Menge mit beliebig vorgegebenen Hauptteilen zu konstruieren.

Satz 19. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z_j \in \Omega$, $j \in \mathbb{N}$, eine diskrete Folge von paarweise verschiedenen Punkten in Ω. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei ein Hauptteil*

$$P_j(z) = \sum_{k=1}^{k_j} a_{j,k} \frac{1}{(z - z_j)^k}$$

gegeben. Dann gibt es eine meromorphe Funktion f auf Ω, die Pole nur an den z_j hat und der Hauptteil deren Laurententwicklung an der Stelle z_j das gegebene P_j ist.

Proof. Wir konstruieren eine Folge von kompakten Mengen K_j mit $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ und $\cup_j K_j = \Omega$ (eine kompakte Ausschöpfung von Ω). Indem wir K_j durch $\hat{K}_{j,\Omega}$ ersetzen, können wir annehmen, dass jedes K_j holomorph-konvex ist (also $\hat{K}_{j,\Omega} = K_j$ erfüllt). Weiters können wir durch einfaches Umnumerieren annehmen, dass $z_j \notin K_\ell$ wenn $j \geq \ell$. Die Funktion P_j ist dann holomorph in einer Umgebung von K_j, und nach Satz 18 gibt es eine holomorphe Funktion h_j auf Ω mit $\|P_j - h_j\|_{K_j} \leq 2^{-j}$.

Wir behaupten nun, dass $f = \sum_j P_j - h_j$ die Bedingungen des Satzes erfüllt. Dazu zeigen wir, dass $f|_{\mathrm{int} K_j}$ eine wohldefinierte meromorphe Funktion auf $\mathrm{int} K_j$ mit Polen genau an den z_k, $k < j$, mit den vorgegebenen Hauptteilen ist, also $f - \sum_{k<j} P_j$ holomorph in $\mathrm{int} K_j$ ist. Es ist nun aber

$$f - \sum_{k<j} P_j = \sum_{k<j} (-h_k) + \sum_{k\geq j} (P_k - h_k),$$

und die zweite Summe konvergiert gegen eine stetige Funktion auf K_j, da $\|P_k - h_k\|_{K_j} \leq \|P_k - h_k\|_{K_k} \leq 2^{-k}$ ist; nach dem Weierstrass'schen Konvergenzsatz ist die Grenzfunktion also holomorph auf $\mathrm{int} K_j$. □

Beispiel 9. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Am Punkt 0 berechnen wir den Hauptteil der Laurententwicklung $f(z) = \frac{1}{z^2} + \ldots$; nachdem f periodisch mit Periode 1, ist der Hauptteil von f an der Stelle $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Die Reihe

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

konvergiert gleichmässig auf kompakten Teilemengen von$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Die Funktion $f(z) - g(z)$ ist also holomorph auf $\mathbb{C}$, und man kann zeigen, dass $\lim_{z\to\infty} f(z) - g(z) = 0$; damit ist nach dem Satz von Liouville $f(z) = g(z)$.

Übung 29. Zeige, dass im obigen Beispiel $\lim_{z\to\infty} f(z) - g(z) = 0$ ist!

Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Nordbergstrasse 15, A-1090 Wien, Austria
E-mail address: bernhard.lamel@univie.ac.at