Höhere Analysis und elementare Differentialgeometrie
Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2016
Version vom 2. Januar 2017

Bernhard Lamel

KAPITEL 1

Teilmannigfaltigkeiten

1. Tangential- und Kotangentialräume

Wir beginnen unsere Diskussion differentialgeometrischer Grundkonzepte mit einer Formalisierung des Differentialkalküls im $\mathbb{R}^N$, das uns von grosser Hilfe sein wird. Wir bezeichnen mit $(x_1, \ldots, x_N)$ die Koordinaten im $\mathbb{R}^N$. Für $p \in \mathbb{R}^N$ sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ erklärt; sie agieren auf Funktionen $\varphi \in C^1(U)$, wo U eine offene Umgebung von p ist, durch

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(p+te_j) - \varphi(p)}{t}.$$

Nachdem dieser Operator nur die "lokale Information" von φ im Punkt p sieht, ist es oft von Vorteil, ihn auf einem geeigneten Raum von *Keimen* von Funktionen zu betrachten. Zunächst betrachten wir *alle* um p definierten C^k-Funktionen, wo $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ ist:

$$E = \bigcup_{U \in \dot{\mathcal{N}}(P)} C^k(U),$$

wo die Vereinigung über alle *offenen* Umgebungen U von p geht. Wir führen auf E eine Äquivalenzrelation ein, indem wir $f \in C^k(U)$ und $g \in C^k(V)$ als äquivalent erklären, wenn f und g nahe bei p übereinstimmen, also formal:

$$f \approx g :\Leftrightarrow \exists W \in \mathcal{N}(p), f|_W = g|_W.$$

Der Quotientenraum

$$C^k(\mathbb{R}^N, p) = E/\approx$$

wird mit den von den Räumen $C^k(U)$ vererbten Operationen (Addition, Skalarmultiplikation, Multiplikation) eine Algebra über $\mathbb{R}$. Die partiellen Ableitungen sind *Derivationen* dieser Algebra, dh sie erfüllen die Leibnizregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p (\varphi\psi) = \varphi(p)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \psi + \psi(p)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \varphi.$$

Dies ist mehr oder weniger das einzige Beispiel einer solchen Derivation.

Lemma 1. *Sei $X\colon C^\infty(\mathbb{R}^N, p) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $X(\varphi\psi) = \varphi(p)X\psi + \psi(p)X\varphi$. Dann gibt es Konstanten $a_j \in \mathbb{R}$ mit*

$$X = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass X alle Konstanten annihiliert:

$$X(1) = X(1\cdot 1) = 1X(1) + 1X(1) = 2X(1),$$

also ist $X(1) = 0$, und damit $X(\lambda) = 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

X annihiliert aber auch alle Terme, die von Ordnung grösser als 1 in p verschwinden: Wenn $\varphi = (x_j - p_j)\psi$ mit $\psi(p) = 0$ ist, so ist

$$\begin{aligned} X\varphi &= X\left((x_j - p_j)\psi\right) \\ &= (x_j - p_j)|_{x=p} X(\psi) + \psi(p) X\left((x_j - p_j)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir definieren nun $a_j = X(x_j - p_j)$, und verwenden den Fundamentalsatz, um ein gegebenes $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, p)$ (das wir mit einem Representanten in einer kleinen Umgebung von p identifizieren)

$$\varphi(x) = \varphi(p) + \sum_{j=1}^{N} (x_j - p_j) \int_0^1 \varphi_{x_j}(tx_j + (1-t)p_j)\, dt, = \varphi(p) + \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)$$

zu schreiben. Nach dem Satz über Parameterintegrale und der Charakterisierung von C^∞-Funktionen durch partielle Ableitungen ist jedes der ψ_j wieder C^∞, und es gilt $\psi_j(p) = \varphi_{x_j}(p)$. Also ist

$$X\varphi = X\left(\varphi(p) + \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \varphi.$$

$\square$

Man kann Ableitungen auch als Richtungsableitungen interpretieren. Für eine glatte Kurve $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^N$ mit $\gamma(0) = p$ definieren wir

$$D_\gamma \varphi = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi \circ \gamma.$$

Wegen der Produktregel ist D_γ eine Derivation im Sinn von oben; das obere Lemma besagt aber auch, dass jede Derivation

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p$$

auch als D_γ aufgefasst werden kann–dafür müssen wir nur $\gamma(t) = p + t(a_1, \ldots, a_N)$ setzen.

Definition 1. Wir definieren den Tangentialraum $T_p\mathbb{R}^N$ von $\mathbb{R}^N$ im Punkt p als

$$T_p\mathbb{R}^N = \left\{ \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p : a_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bemerkung 1. Für jedes p in $\mathbb{R}^N$ gilt, dass der Tangentialraum $T_p\mathbb{R}^N$ ein N-dimensionaler reeller Vektorraum ist, also $T_p\mathbb{R}^N$ isomorph zum $\mathbb{R}^N$ ist.

Bemerkung 2. Ein Element von $T_p\mathbb{R}^N$ ist ein *Tangentialvektor* im Punkt $p \in \mathbb{R}^N$.

Bemerkung 3. Nach Lemma 1 gilt $T_p\mathbb{R}^N = \mathrm{Der}_p C^\infty(\mathbb{R}^N, p)$.

Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ heisst die Vereinigung aller Tangentialräume das *Tangentialbündel* von U, und es ist einfach durch

$$TU := \bigcup_{p \in U} T_p\mathbb{R}^N$$

gegeben. Ein Element von TU ist durch ein Tangentialvektor X_p an einem gewissen Punkt $p \in U$ gegeben, und wir können deswegen TU mit $U \times \mathbb{R}^N$ identifizieren. Diese Identifikation wollen wir im folgenden immer stillschweigend verwenden, und so TU als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2N}$ auffassen, um über topologische Eigenschaften von TU zu sprechen. Die Abbildung $\pi\colon TU \to U$, die einem Tangentialvektor $X \in T_p\mathbb{R}^N$ seinen Fusspunkt p zuordnet, heisst die *Fusspunktabbildung*.

Ein *glattes Vektorfeld* in U ist eine glatte Abbildung $X\colon U \to TU$, welche $\pi \circ X = \mathrm{id}_U$ erfüllt, also eine Abbildung, die jedem Punkt p einen Tangentialvektor $X(p) \in T_p\mathbb{R}^N$ zuordnet. Die Menge der glatten Vektorfelder in $U \subset \mathbb{R}^N$ ist ein Modul $\mathfrak{X}(U)$ über $C^\infty(U)$, und jedes Element $X \in \mathfrak{X}(U)$ lässt sich also als

$$X(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x, \quad a_j \in C^\infty(U)$$

schreiben. Insbesondere können die partiellen Ableitungen als Vektorfelder aufgefasst werden.

Definition 2. Der Dualraum $T_p^*\mathbb{R}^N$ von $T_p\mathbb{R}^N$ heisst der *Kotangentialraum* von $\mathbb{R}^N$ im Punkt p.

Für eine beliebigen Keim $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, p)$ definieren wir das *Differential von* φ, welches mir mit $d\varphi(p) \in T_p^*\mathbb{R}^N$ bezeichnen, durch

$$(d\varphi)_p(X_p) = X_p\varphi.$$

Insbesondere haben die Koordinatenfunktionen x_k Differentiale, und für $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ gilt

$$(dx_k)_p(X) = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial x_k}{\partial x_j}(p) = a_k,$$

und wir sehen, dass die zu der Basis

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots \frac{\partial}{\partial x_N}\Big|_p \right\}$$

von $T_p\mathbb{R}^N$ duale Basis von $T_p^*\mathbb{R}^N$ durch $\{(dx_1)_p, \dots, (dx_N)_p\}$ gegeben ist.

Ähnlich wie beim Tangentialbündel definieren wir das *Kotangentialbündel* einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^N$ durch

$$T^*U = \bigcup_{p\in U} T_p^*U.$$

Die Fusspunktabbildung ist auch ähnlich wie vorher definiert. Die *Schnitte* des Bündels, dh Abbildungen $\omega\colon U \to T^*U$ welche $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_U$ erfüllen, heissen nun *Differentialformen vom Grad* 1 *in* U, oder einfach 1-Formen in U; der Modul dieser Formen wird mit $\Omega^1(U)$ bezeichnet.

Eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$ kann also als

$$\omega = \sum_{j=1}^N a_j dx_j, \quad a_j \in C^\infty(U)$$

geschrieben werden. Wenn $f \in C^\infty(U)$ ist, so erklären wir df wie oben; insbesondere ist für ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(U)$ die Auswertung $df(X) = Xf \in C^\infty(U)$. In Koordinaten ist

$$df = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

2. Teilmannigfaltigkeiten

Definition 3. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$. Wir sagen, M ist eine (glatte) Teilmannigfaltigkeit der Kodimension d bzw. der Dimension $n = N - d$, wenn es für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U \in \mathcal{N}(p)$ und glatte Funktionen $\varrho_1, \dots \varrho_d \in C^\infty(U)$ gibt, die folgende Eigenschaften erfüllen:

(1) $d\varrho_1, \dots d\varrho_d$ sind linear unabhängig in $T_p^*\mathbb{R}^N$ für jedes $p \in U$;
(2) $U \cap M = \{\varrho_1 = \dots = \varrho_d = 0\}$.

Funktionen $\varrho_1, \dots, \varrho_d$ wie oben (dh welche 1) und 2) erfüllt) heissen *definierende Funktionen* für M bei p.

Beispiel 1. Wenn $E \subset \mathbb{R}^N$ ein linearer Teilraum der Dimension $N - d$ ist, so ist E eine Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Dies folgt, da E durch d unabhängige lineare Gleichungen definiert werden kann, dh es gibt eine $d \times n$ Matrix (bzw. lineare Abbildung) A vom Rank d,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d,1} & \dots & a_{d,N} \end{pmatrix}$$

sodass $E = \ker A$. Wir können als definierende Funktionen also die linearen Funktionale

$$\ell_j(x) = \sum_{k=1}^N a_{j,k} x_k$$

verwenden; die Differentiale,

$$d\ell_j = \sum_{k=1}^{N} a_{j,k} dx_k,$$

sind dann offensichtlich linear unabhängig.

Beispiel 2. Wenn $f \in C^\infty(U)$ ist, und df in U nicht verschwindet, so ist $V(f) = f^{-1}(0)$ eine Teilmannigfaltigket (eine *glatte Hyperfläche*). f ist in diesem Fall selber die definierende Funktion. Es gilt $T_pV(f) = \ker(df)_p$.

Beispiel 3. Die Sphäre $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, welche durch

$$S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \cdots + x_N^2 = \langle x, x\rangle = 1\}$$

definiert ist, ist eine glatte Teilmannigfaltigkeit. Für $p \in S^{N-1}$ gilt

$$T_pS^{N-1} = \{(x_1, \dots, x_N) \colon \sum_j x_j p_j = \langle x, p\rangle = 0\}.$$

Beispiel 4. Das Ellipsoid E, definiert durch

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \colon \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j^2}{a_j^2} = 1 \right\},$$

ist eine Teilmannigfaltigkeit.

Beispiel 5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in C^\infty(U)$. Dann ist der Graph Γ_φ der Abbildung $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) \colon U \to \mathbb{R}^d$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N_x = \mathbb{R}^n_s \times \mathbb{R}^d_t$. Definierende Gleichungen sind durch

$$\varrho_j(s, t) = t_j - \varphi_j(s)$$

gegeben. $d\varrho_j$ sind linear unabhängig voneinander, da dt_j genau in $d\varrho_j$ vorkommt.

Das obige Beispiel gibt einen weiteren Prototypen von Teilmannigfaltigkeiten, nämlich Teilmengen, welche durch *lokale Parametrisierungen* definiert sind.

Lemma 2. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$. Dann ist M eine n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit genau dann, wenn für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^N$ und eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von $0 \in \mathbb{R}^n$ sowie glatte Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ existieren sodass mit der Abbildung $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ gilt:*

(1) Der von $d\varphi_1, \dots, d\varphi_N$ an jedem Punkt $p \in V$ aufgespannte Teilraum von T_p^*V hat Dimension n;

(2) $M \cap U = \varphi(V)$.

Beweis. Wir haben in dem obigen Beispiel eigentlich schon gesehen, dass die Bedingung hinreichend ist; um definierende Gleichungen zu erhalten, müssen wir einfach einen passenden Teil der Teil der Parametrisierung nach t auflösen. Da φ vom Rang n ist, besitzt die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_1}(0) & \dots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial t_n}(0) \end{pmatrix}$$

eine $n \times n$-Untermatrix, sagen wir, die durch die Reihen mit den Indizes $1 \le j_1 < \cdots < j_n \le N$ gegebenen, die von vollen Rang ist. Das Gleichungssystem

$$\varphi_{j_1}(t) - x_{j_1} = \cdots = \varphi_{j_n}(t) - x_{j_n} = 0$$

lässt sich deswegen lokal nacht t auflösen, d.h es gibt glatte Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_n$ in x sodass die Lösungen dieses Gleichungssystems durch $t_{j_k} = \psi_k(x_{j_1}, \dots x_{j_n})$ gegeben sind.

Für die komplementären Indizes $k_1, \dots, k_d$ können wir nun, in einer passenden Umgebung von p,

$$\varrho_\ell(x) = x_{k_\ell} - \psi_\ell(x_{j_1}, \dots x_{j_n}) \quad \ell = 1, \dots, d$$

definieren; die Differentiale $d\varrho_\ell$, $\ell = 1, \dots, d$ sind (wo ϱ_ℓ definiert sind) linear unabhängig, da dx_{k_ℓ} nur in $d\varrho_\ell$ vorkommt.

Wenn nun auf der anderen Seite $\varrho_1, \dots \varrho_d$ lokale definierende Funktionen für M bei p sind, so können wir eine Parametrisierung von M bei p wie folgt konstruieren. Zunächst wählen wir eine Basis $v^1, \dots, v^n$ des Tangentialraums T_pM, den wir wie üblich mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, sowie irgendeinen komplementären Teilraum zu T_pM–zum Beispiel $(T_pM)^\perp$, und eine Basis $w^1, \dots, w^d$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$F(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_d) = \begin{pmatrix} \varrho_1\left(\sum_j s_j v^j + \sum_k t_k w^k\right) \\ \vdots \\ \varrho_d\left(\sum_j s_j v^j + \sum_k t_k w^k\right) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$F_t(s,t) = \begin{pmatrix} d\varrho_1(w^1) & \dots & d\varrho_1(w^d) \\ \vdots & & \vdots \\ d\varrho_d(w^1) & \dots & d\varrho_d(w^d) \end{pmatrix}$$

invertierbar am Punkt $s = 0$, $t = 0$: Wenn nicht, dann gäbe es eine nichttriviale Linearkombination der w^j, welche von allen der linearen Funktionale $(d\varrho_j)_p$ annihiliert wird, im Widerspruch zu der Tatsache, dass diese einen komplementären Teilraum zu $T_pM = \cap_j \ker(d\varrho_j)_p$ aufspannen.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es also lokale Lösungen der Gleichung $F(s,t) = 0$ in t, also glatte Funktionen $\psi_1(s), \dots, \psi_d(s)$, definiert für s nahe bei 0, sodass $F(s, \varphi(s)) = 0$ ist. Eine passende Parametrisierung ist also durch

$$\varphi(s) = (\varphi_1(s), \dots, \varphi_N(s)) = \sum_j s_j v^j + \sum_k \psi_k(s) w_k$$

gegeben; wir müssen noch überprüfen, dass diese tatsächlich vom Rang n ist. Dies sehen wir zum Beispiel, indem wir bemerken, dass

$$d\varphi(\frac{\partial}{\partial s_j}) = \begin{pmatrix} d\varphi_1(\frac{\partial}{\partial s_j}) \\ \vdots \\ d\varphi_N(\frac{\partial}{\partial s_j}) \end{pmatrix} = v_j \mod w_1, \dots, w_d$$

ist. □

Beispiel 6. Wir definieren den Torus $M \subset \mathbb{R}^3$ durch die folgende Parametrisierung:

$$\varphi(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} \cos(s_1) \\ \sin(s_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 \\ \cos(s_1) & \sin(s_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(s_2) \\ \sin(s_2) \end{pmatrix}$$

.

Neben Parametrisierungen gibt es noch eine weitere bequeme Art, Teilmannigfaltigkeiten zu beschreiben. Sei dazu $p \in \mathbb{R}^N$ und U eine offene Umgebung von p. Ein glattes Koordinatensystem (oder einfach *glatte Koordinaten*) in U ist ein glatter Diffeomorphismus $\Phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^N$, also eine glatte, bijektive Abbildung, deren Inverses wieder glatt ist. Wir können dann über die Regel $y = \Phi(x)$ (bzw. $x = \Phi^{-1}(y)$) zwischen den Koordinaten x bzw. y wechseln, ohne Eigenschaften, bei denen es um die Differenzierbarkeit geht, zu verändern.

Der Unterschied zwischen definierenden Funktionen und glatten Koordinaten ist nicht wirklich gross, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 3. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$. Dann ist M eine Teilmannigfaltigkeit der Kodimension d genau dann, wenn es für jedes $p \in M$ eine Umgebung U von p und lokale glatte Koordinaten $y = \Phi(x)$ in in U gibt, sodass sich M in den Koordinaten $y = (y_1, \dots, y_N)$ als eine offene Teilmenge des linearen Teilraums $y_{N-d+1} = \dots = y_N = 0$ beschrieben wird.*

Beweis. Sei zunächst M eine Teilmannigfaltigkeit, und $p \in M$. Wir wählen eine offene Umgebung U von p und definierende Funktionen $\varrho_1, \ldots, \varrho_d \in C^\infty(U)$. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

ist also in ganz U vom Rang d, insbesondere am Punkt p. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die quadratische Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_{N-d+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_N}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_{N-d+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_N}(p) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Wir definieren nun $\Phi(x_1, \ldots, x_{N-d+2}, x_{N-d+1}, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_{N-d+2}, \varrho_1(x), \ldots, \varrho_d(x)$. Wegen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_{N-d+1}}(p) & \ldots & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_N}(p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_{N-d+1}}(p) & \ldots & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_N}(p) \end{pmatrix}$$

gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine glatte Lösung $x = \Psi(y)$ der Gleichung $\Phi(x) = y$, also ist Φ auf einer (unter Umständen kleineren) Umgebung V von p ein glattes Koordinatensystem; in den neuen Koordinaten y ist $\Phi(M)$ offensichtlich durch $y_{N-d+1} = \cdots = y_N$ gegeben.

Ist nun auf der anderen Seite die Bedingung des Lemmas erfüllt, so behaupten wir, dass die Funktionen

$$\varrho^j(x) = \Phi_{N-d+j}(x)$$

in einer passenden Umgebung von p definierende Funktionen von M sind. Da Φ ein Diffeomorphismus ist, gilt, dass die Matrix

$$\Phi'(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_N}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_N}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial x_N}(p) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Insbesondere ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_{N-d+1}}{\partial x_{N-d+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_N}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_N}{\partial x_{N-d+1}}(p) & \cdots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial x_N}(p) \end{pmatrix}$$

auch invertierbar, also die $d \times N$-Matrix

$$d\varrho := \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_{N-d+1}}{\partial x_1}(p) & \cdots\cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_N}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_N}{\partial x_1}(p) & \cdots\cdots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial x_N}(p) \end{pmatrix}$$

von Rang d. Das heisst, in einer kleinen Umgebung von p sind $d\varrho^1, \ldots, d\varrho^d$ linear unabhängig, und deswegen passende definierende Funktionen von M. □

Wir haben mit Hilfe der vorangehenden Lemmata also folgende Charakterisierungen für glatte Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ gefunden:

Satz 1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq d \leq N$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) Für jedes p gibt es eine offene Umgebung U von p und glatte Funktionen $\varrho^1, \dots, \varrho^d \in C^\infty(U)$ für die $U \cap X = \{\varrho^1 = \dots = \varrho^d = 0\}$ ist und für die $d\varrho^1, \dots, d\varrho^d$ linear unabhängig in ganz U sind;
(2) Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von p, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{N-d}$ und eine glatte Abbildung $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \colon V \to \mathbb{R}^N$ sodass $M \cap U = \varphi(V)$ ist und $d\varphi_1, \dots, d\varphi_N$ an jedem Punkt $s \in V$ einen Teilraum der Dimension n von $T_s^* V$ aufspannen;
(3) Für jedes p gibt es eine offene Umgebung U von p und glatte Koordinaten $y = \Phi(x)$ in U sodass in den Koordinaten y die Menge $M \cap U$ durch $y_{N-d+1} = \dots = y_N = 0$ definiert ist.

M heisst in diesem Fall eine glatte Teilmannigfaltigkeit der Dimension n und der Kodimension d in $\mathbb{R}^N$.

3. Glatte Funktionen auf Teilmannigfaltigkeiten

Wir besitzen zumindes zwei natürliche Möglichkeiten, glatte Funktionen auf einer Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ zu definieren.

- $C^\infty(M) = \{F|_M \colon F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\}$;
- $C^\infty(M) = \{f \colon M \to \mathbb{R}, f \circ \varphi \in C^\infty(V)$ für jede lokale Parametrisierung $\varphi \colon V \to \mathbb{R}^N\}$.

Um die Äquivalenz dieser Möglichkeiten zu zeigen–eine wichtige Aussage, auch in den Anwendungen–benötigen wir zwei analytische Hilfsmittel, welche uns auch später noch zum Vorteil gereichen werden. Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ schreiben wir $C_c^\infty(U)$ für die Menge der glatten Funktionen ψ auf U, deren Träger $\operatorname{supp} \psi = \{x \in U \colon \varphi(x) \neq 0\}^-$ relativ kompakt in U ist.

Proposition 1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $K \subset U$ kompakt. Dann gibt es eine glatte Funktion $\psi \in C_c^\infty(U)$ mit $\psi|_K = 1$.*

Proposition 2. *Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie offener Mengen in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Menge B und für jedes $\beta \in B$ ein $\sigma(\beta) \in A$, und eine Funktion $\psi_\beta \in C_c^\infty(U_{\alpha(\beta)})$ mit den folgenden Eigenschaften:*
(1) Für jedes $p \in \mathbb{R}^N$ gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{N}(p)$ sodass $\{\beta : \operatorname{supp} \psi_\beta \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist;
(2) $\sum_\beta \psi_\beta(x) = 1$ für jedes $x \in \cup_\alpha U_\alpha$.

Definition 4. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Teilmannigfaltigkeit, $f \colon M \to \mathbb{R}^N$ eine Funktione. Wir sagen, f ist glatt auf M, und schreiben $f \in C^\infty(M)$, wenn für jede glatte Parametrisierung $\varphi \colon \mathbb{R}^n \supset V \to \mathbb{R}^N$ die Zusammensetzung $f \colon \varphi$ eine glatte Funktion auf V ist.

Beispiel 7. Wenn $M \subset U$ mit $U \subset \mathbb{R}^N$ offen ist, und $F \in C^\infty(U)$ ist, so ist $f = F|_M \in C^\infty(M)$ (da die Zusammensetzung glatter Abbildungen wieder glatt ist).

Satz 2. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Teilmannigfaltigkeit der Kodimension d, und $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es eine offene Umgebung U von M in $\mathbb{R}^N$ und $F \in C^\infty(U)$ mit $F|_M = f$. Wenn M abgeschlossen ist, gibt es eine solche Fortsetzung in $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Wenn M zusätzlich kompakt ist, gibt es eine solche Fortsetzung $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Beweis. Für jedes $p \in M$ wählen wir eine offene Umgebung $U_p \in \mathcal{N}(p)$ von p und glatte Koordinaten $\Phi^p = (\Phi_1^p, \dots, \Phi_N^p)$ auf U_p sodass $M \cap U$ durch $\Phi_{N-d+1}^p = \dots = \Phi_N^p = 0$ definiert wird, und $\Phi^p(U_p) = \tilde{U} \times [-\varepsilon^p, \varepsilon^p]^d$ ist. In diesen Umgebungen ist es einfach, Fortsetzungen F^p von f auf U^p zu finden, indem wir entlang von den Koordinatenachsen "konstant fortsetzen", also $F^p(x) = f\left((\Phi^p)^{-1}(\Phi_1^p(x), \dots, \Phi_{N-d}^p, 0, \dots, 0)\right)$ definieren; es gilt dann, dass $F^p|_{M \cap U_p} = f|_{M \cap U_p}$.

Wir wählen nun eine Zerlegung der 1 bezüglich der offenen Mengen $(U^p)_{p \in M} \cup \{\overline{M}^c\}$, und erhalten Funktionen ψ_β, $\beta \in B$, und eine Funktion $\sigma \colon B \to M \cup \{M^c\}$, sodass $\operatorname{supp} \psi_\beta \subset U^p$ für ein $p = \sigma(\beta) \in M$ oder $\operatorname{supp} \psi(\beta) \subset M^c$ ist. Wir definieren nun $\tilde{B} = \{\beta \colon \operatorname{supp} \psi_\beta \circ M \neq \emptyset\}$ und

$$F = \sum_{\beta \in \tilde{B}} \psi_\beta F^{\sigma(\beta)}.$$

Lokal ist F dann eine endliche Summe von glatten Funktionen (man kann $\psi_\beta F^{\sigma(\beta)}$ ausserhalb von $\operatorname{supp} \psi_\beta$ trivial durch 0 fortsetzen), also $F \in C^\infty(U)$, wo $U = \cup_p U_p$; für $x \in M$ ist

$$F(x) = \sum_{\beta \in \tilde{B}} \psi_\beta(x) F^{\sigma(\beta)}(x) = \sum_{\beta \in \tilde{B}} \psi_\beta(x) f(x) = f(x) \sum_{\beta \in \tilde{B}} \psi_\beta(x) = f(x),$$

und wir schliessen $F|_M = f$.

Wenn $M \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen ist, ist die Überdeckung, die wir gewählt haben, eine Überdeckung von $\mathbb{R}^N$ (da $M = \overline{M}$); in diesem Fall ist also $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, wenn wir ausserhalb von U durch 0 fortsetzen.

Wenn $M \subset \mathbb{R}^N$ kompakt ist, also $M \subset B_R(0)$ für $R > 0$ so können wir nach Proposition 1 eine Funktion ψ mit $\operatorname{supp} \psi \subset B_{R+1}(0)$ und $\psi(x) = 1$ für $x \in B_R(0)$ wählen. Die Funktion ψF stimmt dann mit F auf M überein, und hat kompakten Träger. $\square$

Satz 3. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte Teilmannigfaltigkeit, $p \in M$, U eine Umgebung von p in $\mathbb{R}^N$ und definierende Funktionen $\varrho^1, \ldots, \varrho^d$ auf für M auf U. Dann gibt es eine Umgebung V von p sodass für jede Funktion $F \in C^\infty(V)$ mit $F|_M = 0$ Funktionen $a_1, \ldots, a_d \in C^\infty(V)$ existieren sodass $F = a_1\varrho^1 + \cdots + a^d\varrho^d$.*

Beweis. Sei $p \in M$ wie oben gegeben. Wir wählen eine Umgebung die Umgebung V sodass wir Koordinaten $\Phi^p \colon V \to (-\varepsilon, \varepsilon)^N$ haben, und $\Phi^p_{N-d+j} = \varrho^j$ auf V ist. In den Koordinaten $y = \Phi^p(x)$ erfüllt $\tilde{F}(y_1, \ldots, y_N) = F \circ (\Phi^p)^{-1}$, dass $\tilde{F}(y_1, \ldots, y_{N-d}, 0, \ldots, 0) = 0$. Eine Anwendung des Hauptsatzes zeigt, dass

$$\begin{aligned}\tilde{F}(y_1, \ldots, y_{N-d}, y_{N-d+1}, \ldots, y_N) &= \sum_{j=1}^d y_{N-d+j} \int_0^1 \tilde{F}_{y_{N-d+j}}(y_1, \ldots, y_{N-d}, ty_{N-d+1}, \ldots, ty_N)\, dt \\ &=: \sum_{j=1}^d y_{N-d+j} \tilde{a}_j(y),\end{aligned}$$

wo $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_d \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon)^d)$ nach dem Satz über Parameterintegrale. Also gilt

$$F(x) = \tilde{F}((\Phi^p)^{-1}(x)) = \sum_{j=1}^d \Phi^p_{N-d+j}(x) \tilde{a}_j\left((\Phi^p)^{-1}(x)\right) = \sum_{j=1}^d \varrho^j(x) a_j(x).$$

$\square$

Korollar 1. *Sei M eine glatte Teilmannigfaltigkeit, $p \in M$. Seien $\varrho^1, \ldots, \varrho^d$ und $\tilde{\varrho}^1, \ldots, \tilde{\varrho}^d$ definierende Funktionen für M in $U \in \mathcal{N}(p)$. Dann gibt es eine offene Umgebunge V von p glatte Funktionen $A^i_j \in C^\infty(V)$ sodass*

$$\varrho^i = \sum_{j=1}^d A^i_j \tilde{\varrho}^j,$$

und für $x \in M \cap V$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} A^1_1(x) & \ldots & A^d_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^1_d(x) & \ldots & A^d_d(x) \end{pmatrix}$$

invertierbar.

Beweis. Die Funktionen A^i_j existieren nach Theorem 3. Für $x \in M$ ist

$$\frac{\partial \varrho^i}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k}\bigg|_x \left(A^i_j \tilde{\varrho}^j\right) = \sum_{j=1}^d \left(A^i_j(x) \frac{\partial \tilde{\varrho}^j}{\partial x_k}(x) + \tilde{\varrho}^j(x) \frac{\partial A^i_j}{\partial x_k}(x) \right) = \sum_{j=1}^d A^i_j(x) \frac{\partial \tilde{\varrho}^j}{\partial x_k}(x).$$

Wir sehen also, dass für $x \in M$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varrho^1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varrho^1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varrho^d}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varrho^d}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1(x) & \ldots & A^d_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^1_d(x) & \ldots & A^d_d(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\varrho}^1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \tilde{\varrho}^1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{\varrho}^d}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \tilde{\varrho}^d}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

bzw $d\varrho^i = \sum_{j=1}^d A^i_j d\tilde{\varrho}^j$ ist. Nachdem der Zeilenrang der Matrix links d ist, muss also die $d \times d$-Matrix auf der rechten Seite der Gleichung notwendigerweise invertierbar sein muss. $\square$

Definition 5. Seien $M \subset \mathbb{R}^N$ und $M' \subset \mathbb{R}^{N'}$ Teilmannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $h = (h_1, \ldots, h_{N'}) \colon M \to M'$ heisst glatt, und wir schreiben $h \in C^\infty(M, M')$, wenn jeder der Koordinateneinträge $h_j \in C^\infty(M)$ ist.

Satz 4. *Seien $M \subset \mathbb{R}^N$ und $M' \subset \mathbb{R}^{N'}$ Teilmannigfaltigkeiten. Dann ist eine Abbildung $h\colon M \to M'$ glatt genau dann, wenn für jedes $f \in C^\infty(M')$ die Funktion $f \circ H\colon M \to \mathbb{R}$ glatt ist.*

Beweis. Dass die Bedingung hinreichend ist folgt daraus, dass die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^{N'}$ glatt auf M' sind.

Ist auf der anderen Seite h glatt, so können wir nach Theorem 2 eine Fortsetzung H von h finden, welche eine glatte Abbildung von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^{N'}$ ist, sowie eine Fortsetzung F von f, welche eine glatte Funktion auf einer offenen Menge$V \subset \mathbb{R}^{N'}$ ist. Die Zusammensetzung $F \circ H|_{H^{-1}(V)\cap U}$ ist dann eine glatte Fortsetzung von $f \circ h$ auf $H^{-1}(V) \cap U$, also $f \circ h$ glatt auf $\mathbb{R}^{N'}$. $\square$

Für $h \in C^\infty(M, N)$ definieren wir

$$h^*\colon C^\infty(N) \to C^\infty(M), \quad h^*\varphi := \varphi \circ h.$$

h^* ist ein Algebrahomomorphismus, und für $h \in C^\infty(M,N)$ und $g \in C^\infty(N,L)$ ist $g \circ h \in C^\infty(M,L)$ und $(g \circ h)^* = h^* \circ g^*$.

Eine Abbildung $\Phi\colon M \to N$ heisst ein *Diffeomorphismus* (zwischen M und N), wenn $\Phi \in C^\infty(M,N)$ bijektiv ist und $\Phi^{-1}\colon N \to M$ selber wieder glatt ist. Für einen Diffeomorphismus Φ ist die Abbildung $\Phi^*\colon C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ ein Algebraisomorphismus, da $(\Phi^{-1})^* = (\Phi^*)^{-1}$ ist.

4. Tangentialräume und Tangentialbündel

Für eine Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$, und einen Punkt $p \in M$ definieren wir den Tangentialraum von M im Punkt p als den Teilraum

$$T_pM = \left\{X_p \in T_p\mathbb{R}^N \colon X_p\varrho = 0 \text{ wenn } \varrho|_M = 0\right\} \subset T_p\mathbb{R}^N.$$

Für $f \in C^\infty(M)$ und $X_p \in T_pM$ ist der Wert

$$X_pf = XF(p), \quad F|M = f,$$

unabhängig von der Fortsetzung $F \in C^\infty(U)$, wo U eine offene Umgebung von M in $\mathbb{R}^N$ ist: denn ist $\tilde{F}$ eine beliebige andere Fortsetzung von f, so ist $(F - \tilde{F})|_M = 0$, also nach Definition $X_p(F - \tilde{F}) = X_pF - X_p\tilde{F} = 0$ für beliebiges $X_p \in T_pM$.

Wie schon bei Tangentialvektoren offener Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ haben wir auch für Tangentialvektoren an Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ verschiedene Möglichkeiten, sie zu definieren, und zu berechnen.

Unser erster Zugang ist einfach aus der Definition heraus: Ein Tangentialvektor

$$X_p = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \in T_p\mathbb{R}^N$$

ist im Teilraum T_pM, wenn für eine beliebige Wahl von definierenden Funktionen $\varrho^1, \dots, \varrho^d$ für M nahe p das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1\varrho^1_{x_1}(p) + \cdots + a_1\varrho^1_{x_N}(p) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_1\varrho^d_{x_1}(p) + \cdots + a_1\varrho^d_{x_N}(p) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Wenn wir eine solche Wahl definierender Funktionen $(\varrho^1, \dots, \varrho^d)$ als Abbildung in den $\mathbb{R}^d$ auffassen, also

$$\varrho\colon \mathbb{R}^N \supset U \to \mathbb{R}^d, \quad \varrho(x) = \begin{pmatrix} \varrho^1(x) \\ \dots \\ \varrho^d(x) \end{pmatrix},$$

so entspricht also in unserer üblichen Identifikation des $\mathbb{R}^N$ mit $T_p\mathbb{R}^N$ der Teilraum T_pM genau dem Kern $\ker \varrho'(p)$ der Ableitungsmatrix

$$\varrho_x(x)\varrho'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varrho^1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varrho^1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varrho^d}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varrho^d}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere findet man eine Basis von T_pM, indem man eine Basis des Kerns dieser Matrix bestimmt, zum Beispiel mit dem Gaussverfahren; die entstehenden Ausdrücke für die Koeffizienten a_j^k von Basisvektoren

$$v^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \dots \\ a_N^1 \end{pmatrix}, \dots, v^n = \begin{pmatrix} a_1^n \\ \dots \\ a_N^n \end{pmatrix}$$

sind dann rationale Funktionen in den Einträgen der Matrix $\varrho'(p)$, und stellen damit auch eine Basis für T_xM für x nahe bei p dar, indem man in diesen Ausdrücken p durch x ersetzt.

Um diese Aussage besser zu spezifizieren, sagen wir, dass die Koordinaten $(x_1, \dots, x_N) = (s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_d)$ *regulär* für M bei p sind, wenn für eine (und damit nach Korollar 1 für jede) Wahl von definierenden Funktionen die $d \times d$–Untermatrix

$$\varrho_t(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varrho^1}{\partial x_{n+1}}(p) & \dots & \frac{\partial \varrho^1}{\partial x_N}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varrho^d}{\partial x_{n+1}}(p) & \dots & \frac{\partial \varrho^d}{\partial x_N}(p) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Für x nahe bei p ist dann (wegen der Stetigkeit der Determinante) $\varrho_t(x)$ auch invertierbar, und für solche x (sagen wir, $x \in U$) ist der Kern der Matrix ϱ_x dann gleich dem Kern von

$$\varrho_t(x)^{-1}\varrho_x(x) = \begin{pmatrix} \varrho_t(x)^{-1}\varrho_s(x) & I_{d\times d} \end{pmatrix}.$$

Dieser ist einfach zu bestimmen: Für beliebige $a_1, \dots, a_n$ ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ein Element des Kerns genau dann, wenn $b = -\varrho_t(x)^{-1}\varrho_s(x)a$. Für $\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial s_k}$, $k = 1, \dots, n$ (dh den k-ten Einheitsvektoren) erhalten wir so, in kompakter Matrixnotation, Tangentialvektoren X^k, $k = 1, \dots, n$ durch

$$\begin{pmatrix} X_x^1 \\ \vdots \\ X_x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} - \left(\varrho_t(x)^{-1}\varrho_s(x)\right)^t \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Für $x \in U \cap M$ erhalten wir so eine Basis $\{X_x^1, \dots, X_x^n\}$ von T_xM. Für $x \in U$, wo $\varrho(x) = t^0 \neq 0 \in \mathbb{R}^d$, sind diese Tangentialvektoren eine Basis des Tangentialraums von $M_{t^0} = \{x \in U \colon \varrho(x) = t^0\}$.

Beispiel 8. Wenn $\varrho(x) = t - \varphi(s)$ durch eine Parametrisierung von M gegeben ist, so können wir den Tangentialraum von M besonders schön darstellen, da er von den Vektoren

$$X^j = \frac{\partial}{\partial s_j} - \sum_{k=1}^d \varphi_{k,s_j} \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad j = 1, \dots, n$$

aufgespannt wird.

Beispiel 9. Die Formeln oben sind nicht immer optimal anzuwenden. Besonders für Hyperflächen sind sie oft künstlich kompliziert. Wenn M durch das Verschwinden einer glatten Funktion ϱ gegeben ist, so sind die Vektoren

$$X^{j,k} = \varrho_{x_j}\frac{\partial}{\partial x_k} - \varrho_{x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

offensichtlich Tangentialvektoren an M. Wir können *jede* Teilmenge linear unabhängiger Vektoren als Basis verwenden; die Konstruktion oben liefert dann, wenn $\varrho_{x_N} \neq 0$, die spezielle Wahl von Tangentialvektoren

$$X^j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\varrho_{x_j}}{\varrho_{x_N}}\frac{\partial}{\partial x_N}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Wir definieren wie weiter oben schon den Raum der Keime glatter Funktionen auf M am Punkt p, indem wir die Vereinigung

$$\bigcup_U C^\infty(M\cap U),$$

für offene Umgebungen U von p betrachten, und zwei Elemente dieser Menge miteinander identifizieren, wenn sie auf einer Umgebung von p übereinstimmen. Wie schon vorher ergibt sich so eine Algebra; wir bezeichnen sie mit $C_p^\infty(M)$. Dies ist allerdings nicht wirklich ein neues Objekt, da wir für genügend kleine Umgebungen U von p ja Parametrisierungen von $M\cap U$ angeben können; in einer solchen Parametrisierung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \supset V \to M\cap U$ wird aus einer Funktion $f\in C^\infty(M\cap U)$ eine Funktion $\varphi^* f := f\circ\varphi \in C^\infty(V)$. Wenn V genügend klein gewählt ist, besitzt φ eine inverse Abbildung $\varphi^{-1}\colon M\cap U\to V$ (wir nennen die Inversen von Parametrisierungen gerne *Karten*), wo $\varphi^{-1}\in C^\infty(M\cap U, V)$. Es folgt, dass $C_p^\infty(M) = C^\infty_{\varphi^{-1}(p)}$ ist. Tangentialvektoren $X_p\in T_pM$ zeichnen sich dadurch aus, dass sie die Produktregel erfüllen: für $f,g\in C_p^\infty(M)$ gilt

$$X_p(fg) = f(p)X_pg + g(p)X_pf.$$

Diese algebraische Regel charakterisiert Tangentialvektoren.

Lemma 4. *Sei $M\subset\mathbb{R}^N$ eine Teilmannigfaltigkeit, und $D\colon C_p^\infty(M)\to\mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, welche $D(fg) = f(p)Dg + g(p)Df$ für $f,g\in C_p^\infty(M)$ erfüllt. Dann gibt es einen Tangentialvektor $X_p\in T_pM$ mit $Df = X_pf$ für $f\in C_p^\infty(M)$.*

Beweis. D definiert durch $\tilde DF = D(F|_M)$ eine Abbildung $\tilde D\colon C_p^\infty(M)\to\mathbb{R}$, welche $\tilde D(FG) = F(p)\tilde DG + G(p)\tilde F$ für $F,G\in C_p^\infty(\mathbb{R}^N)$ erfüllt. Also gibt es nach Lemma 1 einen Tangentialvektor $X_p\in T_p\mathbb{R}^N$ mit $X_pF = \tilde DF$ für $F\in C_p^\infty(\mathbb{R}^N)$. Wenn $\rho|_M = 0$, ist $\tilde D\rho = D0 = 0$, also ist $X_p\in T_pM$. □

Beispiel 10. Sei $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M\subset\mathbb{R}^N$ eine glatte Kurve in M mit $\gamma(0)=p$. Dann erfüllt die durch

$$D_\gamma(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f\circ\gamma(t),\quad f\in C_p^\infty(M)$$

definierte Abbildung $D_\gamma\colon C_p^\infty(M)\to\mathbb{R}$ die Produktregel, also gilt $D_\gamma\in T_pM$.

Beispiel 11. Wenn M durch

$$(s_1,\dots,s_n) =: s\mapsto(\varphi_1(s),\dots\varphi_N(s))$$

parametrisiert wird, mit $s^0 = \varphi^{-1}(p)$, so sind die Ableitungen entlang der Koordinatenachsen,

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\bigg|_p f := \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial s_j}(s^0),$$

Tangentialvektoren an M.

Definition 6. Das *Tangentialbündel* TM von M ist die glatte Teilmannigfaltigkeit $TM\subset\mathbb{R}^{2N}$, welche durch

$$TM = \bigcup_{x\in M}\{x\}\times T_xM$$

definiert ist.

Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R}^{2N}$ mit $(x,\xi)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$. Für $p\in M$ (und beliebiges $\xi^0\in T_pM$) wählen wir eine Umgebung U von p und definierende Funktionen $(\varrho^1,\dots\varrho^d) = \varrho$ für M in U. Eine definierende Gleichung $\tilde\varrho(x,\xi)$ für TM in $U\times\mathbb{R}^N$ ist dann durch

$$\tilde\varrho(x,\xi) = \begin{pmatrix}\varrho(x)\\ \varrho'(x)\xi\end{pmatrix}$$

gegeben. Der Rang von ϱ' ist $2d$ in $U\times\mathbb{R}^N$, da

$$\tilde\varrho'(x,\xi) = \begin{pmatrix}\varrho'(x) & 0\\ 0 & \varrho'(x)\end{pmatrix}.$$

Die glatte Abbildung $\pi\colon TM\to M$, welche durch $\pi(x,\xi) = x$ definiert ist, heisst *Fusspunktabbildung.*

Definition 7. Eine Abbildung $X\colon M \to TM$ heisst ein (glattes) *Vektorfeld* auf M, wenn $X \in C^\infty(M, TM)$ und $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ ist. Die Menge der Vektorfelder auf M ist ein Modul über $C^\infty(M)$, und wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.

Jedes glatte Vektorfeld X auf M lässt sich nach Definition als

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

für gewisse glatte Funktionen $a_j = X(x_j) \in C^\infty(M)$ schreiben.

Wenn $X^1, \dots, X^n$ Vektorfelder auf $M \cap U$ sind, welche die Eigenschaft haben, dass $\{X^1_x, \dots, X^n_x\} \subset T_xM$ eine Basis sind, so lässt sich jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ auf $M \cap U$ als

$$X_x = \sum_j a_j(x) X^j_x$$

schreiben, mit $a_j \in C^\infty(M \cap U)$. Insbesondere lässt sich in einer Karte auf $\varphi\colon \mathbb{R}^N_s \supset V \to U$ ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M \cap U)$ als

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_j(s) \frac{\partial}{\partial s_j}$$

schreiben.

Ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ lässt sich auf glatte Funktionen $f \in C^\infty(M)$ anwenden, und man erhält $Xf \in C^\infty(M)$. Auch X erfüllt die Produktregel, dh es gilt $X(fg) = fX(g) + gX(f)$. Diese Regel charakterisiert Vektorfelder.

Lemma 5. *Sei $D\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ eine lineare Abbildung, welche $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ erfüllt. Dann gibt es ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $Df = Xf$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $Df(p)$ nur von den Werten von f nahe bei p abhängt. Wenn $\tilde f$ nahe bei p mit f übereinstimmt, gibt es eine Umgebung U von p sodass $f = \tilde f$ auf U ist. wir wählen Funktionen $\chi_1, \chi_2 \in C^\infty(M)$ mit $\chi_1 + \chi_2 = 1$ auf M, und $\chi_2 = 0$ auf einer kompakten Umgebung $K \subset U$ von p. Dann ist für $x \in K$

$$D(f)(x) = D(\chi_1 f + \chi_2 f)(x) = D(\chi_1 f)(x) + f(x)D(\chi_2)(x) = D(\chi_1 \tilde f)(x) + \tilde f(x)D(\chi_2)(x) = D(\tilde f)(x).$$

Es folgt, dass wir für $\varphi \in C^\infty_p(M)$ durch

$$D_p\varphi = D(\chi\varphi)(p),$$

wo $\varphi\colon W \to \mathbb{R}$ durch eine glatte Funktion $\chi \in C^\infty_c(U)$ mit $\chi = 1$ auf einer kompakten Umgebung $L \subset U$ von p zu einer glatten Funktion auf M modifiziert wird, eine Funktion $D_p\colon C^\infty_p(M) \to \mathbb{R}$ definieren können, welche die Produktregel erfüllt. Es folgt aus Lemma 4 , dass bei p die Wirkung von D durch einen Tangentialvektor X_p gegeben ist. Da

$$X_p = \sum_{j=1}^{N} a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p$$

ist, und $a_j(p) = X_p(x_j) = D(x_j)(p)$, ist $X\colon p \mapsto X_p$ ein glattes Vektorfeld, das nach Konstruktion $Df = Xf$ für $f \in C^\infty(M)$ erfüllt. □

Satz 5. *Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist die durch*

$$f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$

definierte Abbildung durch die Wirkung eines Vektorfelds $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, welches die Lieklammer von X mit Y genannt wird, gegeben.

Beweis. Wir können einerseits überprüfen, dass $[X, Y]$ die Produktregel erfüllt, oder berechnen, dass für $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ und $Y = \sum_k b_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ mit $a_j, b_k \in C^\infty(M)$

$$[X, Y] = \sum_{k=1}^{N} (X b_k - Y a_k) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

gilt. □

Bemerkung 4. Die Lieklammer erfüllt die folgenden Eigenschaften:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$
$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$
$$[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]$$
$$[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$$

für beliebige $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$.

Sei nun $h\colon M \to M'$ eine Abbildung zwischen Teilmannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$ und $M' \subset \mathbb{R}^{N'}$. Für $p \in M$ und $X_p \in T_pM$ wird durch

$$f \mapsto X_p(f \circ h), \quad f \in C_h^\infty(p)(M'),$$

eine Abbildung von $C^\infty_{h(p)}M'$ nach $\mathbb{R}$ definiert, welche die Produktregel erfüllt. Nach Lemma 4 gibt es einen Tangentialvektor $X'_{h(p)} \in T'_{h(p)}M'$ mit der Eigenschaft, dass

$$X_p(f \circ h) = X'_{h(p)} f$$

ist. Wir schreiben $X'_{h(p)} =: h'(p)(X_p)$ und nennen die Abbildung $h'(p)\colon T_pM \to T_{h(p)}M'$ die Ableitung von h im Punkt p, oder auch das Differential von h im Punkt p. Wenn $H \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N'})$ eine Fortsetzung von h ist, so ist mit der üblichen Identifikation von $T\mathbb{R}^N$ mit $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$f'(x)(\xi) = H'(x)\xi, \quad \xi \in T_xM,$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung die übliche Ableitung (bzw. Ableitungsmatrix) von H gemeint ist.

Die glatte Abbildung $Th\colon TM \to TM'$, welche durch $Th(x, \xi) = (h(x), h'(x)\xi)$ definiert ist, heisst die *Tangentialabbildung* von h.

5. Kotangentialraum und Kotangentialbündel

Wir definieren wie zuvor

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

Ein kleines Problem mit den definierenden Gleichungen des Kotangentialbündels

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M$$

ist, dass die Identifikation von T_p^*M mit einem Teilraum von $T^*M = \mathbb{R}^N$ wegen

$$T_p^*M = {T_p^*\mathbb{R}^N}\big/\{\lambda\colon \lambda|_{T_pM} = 0\}$$

nicht eindeutig ist.

Jeder zu $\mathrm{annT_pM} = \{\lambda\colon \lambda|_{\mathrm{T_pM}} = 0\}$ komplementäre Teilraum in $T_p^*\mathbb{R}^N$ ist hier zunächst gleichberechtigt. Sind zB $x = (s, t)$ reguläre Koordinaten für M bei p, so spannen die Formen $\{ds_1, \dots, ds_n\}$ einen solchen Teilraum auf.

Um einfache definierende Gleichungen angeben zu können, verwenden wir den speziellen Teilraum

$$(\mathrm{annT_pM})^\perp \cong \mathrm{T_p^*M},$$

wobei wir das innere Produkt auf dem $\mathbb{R}^N = T_p^*\mathbb{R}^N$ verwenden. Wir identifizieren also, um eine Identifikation mit einem Teilraum von $\mathbb{R}^N$ zu erhalten, T_p^*M mit $(\mathrm{annT_pM})^\perp$; da die Auswertung eines linearen Funktionals bei der Identifikation von $T_p^*\mathbb{R}^N$ mit $\mathbb{R}^N$ gerade dem üblichen Skalarprodukt entspricht, ergibt sich so $T_p^*M = T_pM$.

So ergibt sich für das Kotangentialbündel $T^*M \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ zwar eine einfache definierende Gleichung, aber man zahlt einen teuren Preis, da die Flexibilität der Wahl eines komplementären Teilraums einer der grossen Stärken des Kotangentialbündels ist. Um dieses Problem aufzulösen, ist der "sauberste" Zugang, gleich auf abstrakten Mannigfaltigkeiten zu arbeiten, die wir aber in dieser Vorlesung noch nicht einführen wollen. Wir begnügen uns mit folgender Bemerkung.

Lemma 6. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Teilmannigfaltigkeit, $p \in M$, und $\omega^1, \dots, \omega^n \in \Omega^1(\mathbb{R}^N)$ linear unabhängig in einer Umgebung von p sind. Dann gibt es eine Umgebung U von p sodass für den von von den Formen $(\omega^1)_q, \dots, (\omega^n)_q$ in $T_q^*\mathbb{R}^N$ aufgespannten Unterraum folgendes gilt: Die Menge*

$$W = \bigcup_{q \in M \cap U} \{q\} \times F_q$$

eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2N}$, welche diffeomorph zu $T^*(M \cap U) = (T^*M) \cap (U \times \mathbb{R}^N)$ ist.

Beweis. Wir wählen U so, dass es definierende Funktionen $\varrho^1, \dots, \varrho^d$ von M in U sowie eine Parametrisierung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \supset V \to M \cap U$ gibt und $\omega^1, \dots, \omega^n$ nicht nur linear unabhhängig in U sind, sondern für jedes $q \in U$ die Menge $\{(d\varrho^1)_q, \dots, (d\varrho^d)_q, (\omega^1)_q, \dots, (\omega^n)_q\}$ eine Basis von $T_q^*\mathbb{R}^N$ bildet.

Damit ist $\tilde{\varphi}\colon V \times \mathbb{R}^N_\eta$,

$$\tilde{\varphi}(s_1, \dots, s_n, \eta_1, \dots, \eta_n) = \left(\varphi(s), \sum_{j=1}^n \eta^j \omega^j\right),$$

eine Parametrisierung von W.

Wir konstruieren nun einen Diffeomorphismus $\Phi\colon W \to T^*(M \cap U)$. Wir machen den Ansatz $\Phi(x, \xi) = (x, M(x)\xi)$ und wählen die Matrix $M(x)$ mit Hilfe eines vereinfachten Gram-Schmidt Algorithmus so, dass $\omega_1, \dots, \omega_n$ zu einer Basis von $T_p^*M \subset \mathbb{R}^N$ wird. Die zu $M(q)$ gehörende lineare Transformation ist auf der Basis $\{(d\varrho^1)_q, \dots, (d\varrho^d)_q, (\omega^1)_q, \dots, (\omega^n)_q\}$ von $T_q^*\mathbb{R}^N$ wie folgt definiert:

$$(d\varrho^j)_q \mapsto (d\varrho^j)_q, \quad j = 1, \dots, d;$$

$$(\omega_k)_q \mapsto (\omega_k)_q - \sum_{j=1}^d \langle (\omega_k)_q, (d\varrho^j)_q \rangle (d\varrho^j)_q.$$

Die zugehörige Matrix ist wegen der glatten Abhängigkeit aller Daten wieder glatt, als Funktion von q aufgefasst. □

6. 1-Formen und Integrabilität

Eine 1-Form auf M ist eine glatte Abbildung $\omega\colon M \to T^*M$ die jedem $p \in M$ eine Form in T_p^*M zuordnet, also mit der Fusspunktabbildung $\tilde{\pi}\colon T^*M \to M$ die Gleichung $\tilde{\pi} \circ \omega = \mathrm{id}_M$ erfüllt. Eine beliebige Abbildung $\omega\colon M \to T^*M$ ist demnach glatt, wenn für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Auswertung $\omega(X)$ wieder glatt ist.

Insbesondere ergibt für eine 1-Form ω und ein Vektorfeld X die Anwendung $\omega(X)$ eine glatte Funktion, und die Abbildung $X \mapsto \omega(X)$ ist offensichtlich linear in dem Sinn, dass

$$\omega(X + fY) = \omega(X) + f\omega(Y)$$

für $X, Y \in \mathfrak{X}$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt.

Umgekehrt ist jede lineare Abbildung $L\colon \mathfrak{X}(M)$ durch eine 1-Form gegeben:

Satz 6. *Sei $L\colon \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ linear, also $L(X + fY) = L(X) + fL(Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ unf $f \in C^\infty(M)$. Dann gibt es eine 1-Form ω sodass $L(X) = \omega(X)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $L(X)(p)$ nur von X_p abhängt. Sei also $X_p = 0$; wir müssen zeigen, dass $L(X)(p) = 0$ ist. Wir wählen dazu Vektorfelder $X^1, \dots, X^n$, die bei X linear unabhängig sind. Dann können wir für $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\chi = 1$ in einer kleinen Umgebung von p das Vektorfeld χX in der Form

$\chi X = \sum_j a_j X^j$ mit $a_j \in C^\infty(M)$ schreiben; nachdem $\chi(p)X_p = 0$, folgt $a_j(p) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Aus der Linearität von L folgt nun

$$L(X)(p) = \chi(p)L(X)(p) = L(\chi X)(p) = \sum_j a_j(p)L(X^j)(p) = 0.$$

Damit ist die Festsetzung $X_p \mapsto L(X)(p)$ unabhängig von einer gewählten glatten Fortsetzung von X_p auf M, und wir können auf diese Weise $L(X)(p) = \omega_p(X_p)$ mit einem $\omega_p \in T_p^*M$. Die so definierte 1-Form ω ist glatt (da definitionsgemäss für $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktion $\omega(X) = L(X) \in C^\infty(M)$ ist). $\square$

Eine spezielle 1-Form ist das Differential df einer glatten Funktion $f \in C^\infty(M)$, definiert durch

$$df(X) = Xf.$$

Nicht jede 1-Form tritt als das Differential einer glatten Funktion auf. Eine notwendige Bedingung findet man wie folgt: Wenn $\omega = df$, so ist

$$\begin{aligned} X\omega(Y) - Y\omega(X) &= X(Yf) - Y(Xf) \\ &= [X,Y]f \\ &= \omega([X,Y]) \end{aligned}$$

Wir definieren

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]).$$

Das so entstandene Objekt ist eine 2-Form α: So nennen wir Abbildungen $\alpha\colon \mathfrak{X}(M)^2 \to C^\infty(M)$, welche linear in jeder Komponente sind,

$$\alpha(X + fY, Z) = \alpha(X,Z) + f\alpha(Y,Z), \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}, \quad f \in C^\infty(M)$$

und antisymmetrisch sind, also $\alpha(X,Y) = -\alpha(Y,X)$ erfüllen (die Linearität im zweiten Faktor folgt dann).

Wir verifizieren die Linearität bezüglich der Multiplikation mit C^∞-Funktionen:

$$\begin{aligned} d\omega(fX,Y) &= fX\omega(Y) - Y(\omega(fX)) - \omega([fX,Y]) \\ &= fX\omega(Y) - (Yf)\omega(X) - f(Y\omega(X)) - \omega(f[X,Y] - (Yf)X) \\ &= fX\omega(Y) - f(Y\omega(X)) - \omega(f[X,Y]) \\ &= fd\omega(X,Y). \end{aligned}$$

Satz 7. *Sei α eine 2-Form auf M. Dann gibt es für jedes $p \in M$ eine alternierende Bilinearform α_p auf T_pM sodass $\alpha(X,Y)(p) = \alpha_p(X_p, Y_p)$.*

Der Beweis erfolgt genau so wie in der Charakterisierung von 1-Formen; die Linearität von α garantiert, dass $\alpha(X,Y)(p)$ nur von X_p und Y_p abhängt.

Wir können nun schon erklären, wie wir Differentiale von 1-Formen tatsächlich berechnen können. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass sich jede 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ in der Form

$$\omega = \sum_{j=1}^N \omega^j dx_j, \quad \omega^j \in C^\infty(M),$$

schreiben lässt, und "rechnen in $\mathbb{R}^N$".

Zunächst ist d offensichtlich linear bezüglich der Addition von Formen. Aber die Regel $d(fg) = fdg + gdf$ (für Funktionen f,g) lässt schon vermuten, dass d als Ableitungsoperator nicht linear bezüglich der Multiplikation sein wird. Wir berechnen deswegen den Ausdruck $d(fdg)$ für glatte Funktionen $f,g \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} d(fdg)(X,Y) &= X(f\,Yg) - Y(f\,Xg) - fdg([X,Y]) \\ &= Xf\,Yg - Yf\,Xg + f(XYg - YXg) - f(XYg - YXg) \\ &= Xf\,Yg - Yf\,Xg \\ &= \begin{vmatrix} df(X) & df(Y) \\ dg(X) & dg(Y) \end{vmatrix} \\ &=: df \wedge dg(X,Y). \end{aligned}$$

Die 2-Form in der letzten Zeile wird als das *Keilprodukt* der 1-Formen df und dg bezeichnet.

Wenn wir unsere gegebenen Funktionen f und g mit ihren Fortsetzungen auf eine offene Teilmenge identifizieren, sehen wir also

$$\begin{aligned} d(fdg) &= df \wedge dg \\ &= \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge \left(\sum_k \frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k\right) \\ &= \sum_{j,k} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge \frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k \\ &= \sum_{j,k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k} dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{j<k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) dx_j \wedge dx_k \end{aligned} .$$

Damit ergibt sich für eine allgemeine 1-Form $\alpha = \sum_j \omega^j dx_j$, dass

$$d\omega = \sum_{j<k} \left(\frac{\partial \omega^k}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega^j}{\partial x_k} dx_j \wedge dx_k\right).$$

Es ist nicht offensichtlich, dass dieser Ausdruck nicht von der gewählten Fortsetzung von ω zu einer 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^N$ abhängt, aber wir wissen ja aus der Definition, dass $d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])$; in diesem Ausdruck *ist* es offensichtlich.

Um sagen zu können, dass die Bilinearformen α_p glatt von p abhängen, müssten wir zunächst die Familie der Räume der alternierenden Bilinearformen auf T^pM, die wir jeweils mit $\Lambda^2 T_p^* M$ bezeichnen, mit einer glatten Struktur versehen. Dies ist möglich, aber in der jetzigen Situation etwas unbequem; wir verwenden deswegen die Definition oben, die wir noch einmal formal wiederholen, und das Ergebnis unserer Rechnungen zusammenfassen; dazu benötigen wir

$$\Lambda^2 T^* M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \Lambda^2 T_p^* M.$$

Definition 8. Eine Abbildung $\omega \colon M \to \Lambda^2 T^* M$ heisst eine glatte 2-Form auf M, wenn $\omega(p) = (p, \omega_p)$ ist und für jede Wahl von $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ die Auswertung $\omega(X,Y)$, definiert durch

$$\omega(X,Y)(p) = \omega_p(X,Y),$$

glatt auf M ist.

Definition 9. Wir definieren den Operator $\wedge \colon \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^2(M)$ durch

$$\omega \wedge \eta(X,Y) = \begin{vmatrix} \omega(X) & \omega(Y) \\ \eta(X) & \eta(Y) \end{vmatrix}.$$

LEMMA 7. *Der Operator $\wedge$ erfüllt die folgenden Rechenregeln:*

$$(\omega + f\eta) \wedge \sigma = \omega \wedge \sigma + f\eta \wedge \sigma, \quad \omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega.$$

Definition 10. Wir definieren den Operator $d \colon \Omega^1(M) \to \Omega^2(M)$ durch

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]).$$

Es ist oft bequem, $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ zu schreiben, und Funktionen als 0-Formen aufzufassen (was sie auch sind, da sie Punkten Skalare zuordnen). Wir haben damit folgende Kette von Operatoren:

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M)$$

LEMMA 8. *Der Operator d erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

$$d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta, \quad d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega, \quad d(df) = 0.$$

Beweis. Wir haben die Produktregel zwar schon (fast) nachgerechnet, wiederholen aber:

$$\begin{aligned} d(f\omega)(X,Y) &= X(f\omega(Y)) - Y(f\omega(X)) - f\omega([X,Y]) \\ &= (Xf)\omega(Y) + fX\omega(Y) - (Yf)\omega(X) - fY\omega(X) - f\omega([X,Y]) \\ &= fd\omega(X,Y) + (Xf)\omega(Y) - -(Yf)\omega(X) \\ &= (fd\omega + df \wedge \omega)(X,Y). \end{aligned}$$

Die Behauptung $d \circ d = 0$ folgt aus der Definition von d:

$$d(df)(X,Y) = Xdf(Y) - Ydf(X) - df([X,Y]) = (XYf - YXf) - (XYf - YXf) = 0.$$

□

Wir können nun die *lokale* Obstruktion zur Integrabilität von 1-Formen untersuchen, welche durch $d \circ d = 0$ gegeben ist. Die Aussage des nächsten Satzes wird auch gerne als *Poincaré-Lemma* bezeichnet.

Satz 8. *Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ mit $d\omega = 0$ gegeben, $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung U von p in M und eine Funktion $f \in C^\infty(U)$ mit $df = \omega|_U$.*

Beweis. Für den Beweis des Satzes wählen wir eine Parametrisierung $\varphi\colon \mathbb{R}^n_s \supset B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}^N$ von M mit $\varphi(0) = p$, und definieren $U = \varphi(B_\varepsilon(0))$. Wir betrachten den Koordinatenausdruck von

$$\omega = \sum_{j=1}^N \omega^j dx_j, \quad \omega^j \in C^\infty(M)$$

bei p, das heisst, die Form

$$\varphi^*\omega := \sum_{j=1}^N (\omega^j \circ \varphi) d\varphi_j,$$

welches eine glatte 1-Form auf $B_\varepsilon(0)$ ist–sie erfüllt offensichtlich $\varphi^*\omega(S)(s) = \omega_\varphi(s)(\varphi'(s)S_s)$ für $S \in \mathfrak{X}(B_\varepsilon(0))$.

Für die Ableitung von $\varphi^*\omega$ gilt

$$\begin{aligned} d\varphi^*\omega &= d\left(\sum_{j=1}^N (\omega^j \circ \varphi) d\varphi_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^N d(\omega^j \circ \varphi) \wedge d\varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial x_k} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial s_\ell} ds_\ell\right) \wedge d\varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \omega^j}{\partial x_k} \circ \varphi\right) d\varphi_k\right) \wedge d\varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^N \varphi^* d\omega^j \wedge d\varphi_j \\ &(=: \varphi^* d\omega). \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile lesen wir ab, dass

$$d\varphi^*\omega(S,T)(s) = (d\omega)_{\varphi(s)}(\varphi'(s)S, \varphi'(s)T) = 0$$

nach Voraussetzung gilt. Das heisst, die Form $\varphi^*\omega = \eta = \sum_{k=1}^n \eta^j(s) ds_j$ erfüllt

$$d\eta = \sum_{j<k} \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta^j}{\partial x_k}\right) ds_j \wedge ds_k = 0,$$

bzw die aus den Übungen bekannten *Kompatibilitätsbedingungen*

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial x_j} = \frac{\partial \eta^j}{\partial x_k}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Wir definieren nun

$$f(s) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \eta^k(ts) s_k \, dt.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $df = \eta$ gilt. Wenn wir also $F = f \circ \psi \in C^\infty(U)$ betrachten, gilt

$$dF\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\right) = \frac{\partial}{\partial s_j} F \circ \varphi = (\frac{\partial}{\partial s_j} f) \circ \psi = \eta^j \circ \psi = \omega\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\right),$$

also $dF = \omega$. □

Die Existenz von *globalen* Stammfunktionen unterliegt einer weiteren Obstruktion. Wir führen dazu das *Wegintegral* einer 1-Form ein. Für eine stückweise glatte Kurve $\gamma\colon [a,b] \to M$ und $\omega \in \Omega^1(M)$ definieren wir

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \gamma^* \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \, dt.$$

Der Ausdruck rechts ist definiert, indem wir $[a, b]$ in Teilintervalle

$$[a, b] = \cup_{j=1}^r [t_{j-1}, t_j], \quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$$

zerlegen, auf denen γ tatsächlich glatt ist, d.h.

$$\gamma|_{(t_{j-1}, t_j)} = \gamma_j|_{(t_{j-1}, t_j)}, \quad \gamma_j \in C^\infty([t_{j-1}, t_j], M);$$

damit definieren wir

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \, dt = \sum_{j=0}^r \int_{t_{j-1}}^{t_j} \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \, dt.$$

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung von γ.

Für $F \in C^\infty(M)$ gilt

$$\frac{d}{dt} F \circ \gamma dt = \gamma^* \omega,$$

also nach dem Fundamentalsatz

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} dF_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \, dt = F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1})).$$

Wir folgern, dass

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a));$$

mit anderen Worten: *das Wegintegral einer Ableitung dF hängt nur vom Anfangs- und vom Endpunkt des Weges ab.*

Definition 11. Wir sagen, eine Mannigfaltigkeit M ist *wegzusammenhängend*, wenn es für beliebige p, q ein stückweise glattes $\gamma\colon [a, b] \to M$ gibt mit

Satz 9. *Sei M wegzusammenhängend und ω eine 1-Form mit $d\omega = 0$. Dann besitzt ω eine Stammfunktion genau dann, wenn das Wegintegral*

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(a), \gamma(b))$$

nur von den Endpunkten von γ, nicht aber vom gewählten Verbindungsweg abhängt.

Beweis. Wir haben oben bereits gezeigt, dass die angegebene Bedingung notwendig ist. Sei also das Wegintegral wegunabhängig. Wir wählen ein fixes $p \in M$ und für jedes $q \in M$ einen Verbindungsweg γ_q von p nach q, und definieren

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega.$$

Für gegebenes $x_0 \in M$ gibt es eine (wegzusammenhängende) Umbebung U von x_0 und eine glatte Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$ mit $dg = \omega|_U$. Wir wählen einen Weg σ, der vollständig in U liegt, und x_0 mit $x \in U$ verbindet. Die Hintereinanderreihung von γ_{x_0} und σ ist dann ein Weg, der p mit x verbindet. Da das Integral wegunabhängig ist, gilt

$$f(x) = \int_{\gamma_{x_0}} \omega + \int_{\sigma} \omega = \int_{\gamma_{x_0}} \omega + g(x) - g(x_0),$$

also ist f glatt auf U und $df|_U = \omega|_U$. Da x_0 beliebig war, ist $f \in C^\infty(M)$ und damit $df = \omega$. □

Beispiel 12. Wir betrachten eine 1-Form $\omega = \alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy$ in einer offenen Menge in $\mathbb{R}^2$, $p, q \in \mathbb{R}^2$. Seien weiters $\gamma^0 = (x^0, y^0)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma^1 = (x^1, y^1)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ zwei glatte Wege, die p mit q verbinden. Wir nehmen an, dass es eine glatte Abbildung $H\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gibt, sodass

$$H(0,t) = \gamma^1(t), \quad H(1,t) = \gamma^2(t) \quad H(s,a) = p, \quad H(s,b) = q.$$

(Wir nennen eine solche Abbildung H eine Homotopie zwischen γ^1 und γ^2). Dann gilt $\int_{\gamma^1} \omega = \int_{\gamma^2} \omega$:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^1} \omega - \int_{\gamma^0} \omega &= \int_a^b (\alpha x_t + \beta y_t)|_{s=0}^{s=1}\, dt \\
&= \int_0^1 \int_a^b \frac{d}{ds}(\alpha x_t + \beta y_t)\, dtds \\
&= \int_0^1 \int_a^b (\alpha_x x_s x_t + \alpha_y y_s x_t + \beta_x x_s y_t + \beta_y y_s y_t)\, dtds + \int_0^1 \int_a^b (\alpha x_{st} + \beta y_{st})\, dtds \\
&= \int_0^1 \int_a^b (\alpha_x x_s x_t + \alpha_y y_s x_t + \beta_x x_s y_t + \beta_y y_s y_t)\, dtds + \int_0^1 \underbrace{(\alpha x_t + \beta y_t)|_{t=0}^{t=1}}_{=0}\, ds \\
&\qquad - \int_0^1 \int_a^b (\alpha_x x_t x_s + \alpha_y y_t x_s + \beta_x x_t y_s + \beta_y y_t y_s)\, dsdt \\
&= \int_0^1 \int_a^b (\alpha_y - \beta_x)(x_t y_s - y_t x_s)\, dtds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wir schliessen, dass das Wegintegral wegunabhängig ist.

Das letzte Beispiel ist schon "fast" der Satz von Stokes in der Ebene, zumindest mit sehr einfachen Integrationsbereichen (Rechtecken). Um den allgemeinen Satz formulieren zu können, benötigen wir als Vorbereitung noch einige Aspekte des Differentialformenkalküls, die implizit in den Beweisen der vorangehenden Sätzen schon verwendet wurden.

7. Differentialformen auf $\mathbb{R}^N$

7.1. Lineare Algebra. Sei V ein Vektorraum (über den reellen Zahlen), mit $\dim V = n$. Eine Abbildung $A\colon V^k \to \mathbb{R}$ heisst *k-Linearform* oder *Multilinearform vom Grad k*, wenn A in jeder Komponente linear ist, d.h.

$$A(v^1, \dots, v^j + \lambda w^j, \dots, v^k) = A(v^1, \dots, v^j, \dots, v^k) + \lambda A(v^1, \dots, w^j, \dots, v^k),$$

und zwar für beliebige $v^\ell, w^\ell \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$. Wenn eine Basis $f^1, \dots f^n$ von V gegeben ist, und $f_1, \dots, f_n$ die dazugehörige duale Basis von V^* ist, so kann man jede Multilinearform vom Grad k als

$$\begin{aligned} A(v^1, \dots, v^k) &= A\left(\sum_{j_1=1}^{n} f_{j_1}(v^1) f^j, \dots, \sum_{j_k=1}^{n} f_{j_k}(v^k) f^{j_k}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} f_{j_1}(v^1) \cdots f_{j_k}(v^k) A\left(f^j, \dots,\ f^{j_k}\right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{n} f_{j_1}(v^1) \cdots f_{j_k}(v^k) A^{j_1 \cdots j_k}, \end{aligned}$$

für gewisse Zahlen $A^{j_1 \cdots j_k} \in \mathbb{R}$; ähnlich wie bei einer Matrix kann man sich diese Anordnung von n^k Zahlen als k-dimensionalen Gitterpunktewürfel vorstellen, und es ist dies die Basisdarstellung von A bezüglich der Basis $\{v^1, \dots v^n\}$ von V. Die Menge der k-linearen Formen auf V werden wir mit $L^k(V, \mathbb{R})$ oder einfach $L^k(V)$ bezeichnen (für jene, die schon Tensorräume kennengelernt haben: $L^k(V) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{k\text{mal}}$).

Die Menge $L^k(V)$ der k-Linearformen wird mit der üblichen Festsetzung

$$(A + \lambda B)(v^1, \dots, v^k) = A(v^1, \dots, v^k) + \lambda B(v^1, \dots, v^k)$$

zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ der Dimension n^k.

Eine k-lineare Form A heisst *symmetrisch*, wenn

$$A(v^1, \dots, v^j, \dots, v^\ell, \dots v_k) = A(v^1, \dots, v^\ell, \dots, v^j, \dots v^k)$$

für alle $v^1, \dots, v^k \in V$ und $1 \le j < k \le n$ gilt. A heisst *alternierend*, wenn

$$A(v^1, \dots, v^j, \dots, v^\ell, \dots v_k) = -A(v^1, \dots, v^\ell, \dots, v^j, \dots v^k),$$

wiederum für alle $v^1, \dots, v^k \in V$ und $1 \le j < k \le n$ gilt. Eine k-lineare Form A ist also symmetrisch genau dann, wenn

$$A(v^1, \dots, v^k) = A(v^{\pi_1}, \dots, v^{\pi_k})$$

für jede Permutation $\pi \in S_k$ gilt, und alternierend genau dann, wenn

$$A(v^1, \dots, v^k) = (\operatorname{sgn} \pi) A(v^{\pi_1}, \dots, v^{\pi_k})$$

für jede Permutation $\pi \in S_k$ gilt. Gleichwertig ist, dass für eine (und damit jede) Basisdarstellung von A die Gleichung

$$A^{j_1 \cdots j_k} = A^{j_{\pi_1} \cdots j_{\pi_k}}, \quad \pi \in S_k$$

im symmetrischen bzw.

$$A^{j_1 \cdots j_k} = (\operatorname{sgn} \pi) A^{j_{\pi_1} \cdots j_{\pi_k}}, \quad \pi \in S_k$$

im alternierenden Fall gelten. Der Raum der symmetrischen bzw. alternierenden k-Multilinearformen ist jeweils ein Unterraum $\mathrm{Sym}^k V$ bzw. $\Lambda^k V^*$ von $L^k(V)$.

Für eine beliebige k-lineare Form A kann man die Symmetrisierung von A durch

$$\mathrm{sym} A(v^1, \dots, v^k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} A(v^{\pi_1}, \dots, v^{\pi_k})$$

und die Alternisierung von A durch

$$\mathrm{alt} A(v^1, \dots, v^k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (\operatorname{sgn} \pi) A(v^{\pi_1}, \dots, v^{\pi_k})$$

definieren. Die Abbildungen $\mathrm{sym}\colon L^k(V) \to \mathrm{Sym}^k V$ und $\mathrm{alt}\colon L^k(V) \to \Lambda^k V^*$ sind linear und es gilt

$$A \in \mathrm{Sym}^k V \Leftrightarrow A = \mathrm{sym} A$$

$$A \in \Lambda^k V^* \Leftrightarrow A = \mathrm{alt} A.$$

Man kann eine k-lineare Form $A \in L^k(V)$ und eine ℓ-lineare Form $B \in L^\ell(V)$ "multiplizieren", um eine Form $A \otimes B \in L^{k+\ell}(V)$ zu erhalten, indem man $A \otimes B$ durch

$$(A \otimes B)(v^1, \ldots, v^k, w^1, \ldots, w^\ell) = A(v^1, \ldots, v^k)B(w^1, \ldots, w^\ell), \quad v^1, \ldots v^k, w^1, \ldots w^\ell \in V$$

definiert. Wir benötigen im folgenden vor allem die alternierende Variante dieses "Tensorprodukts", das *Keilprodukt* (auch *äusseres Produkt* oder *Hakprodukt* genannt) der alternierenden k-Form A mit der alternierenden k-Form B, definiert durch

$$\begin{aligned} A \wedge B(v^1, \ldots, v^k, v^{\ell^1}, \ldots, v^{\ell+k}) &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}(\mathrm{alt}(A \otimes B))(v^1, \ldots, v^k, w^1, \ldots, w^\ell) \\ &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} A(v^{\pi_1}, \ldots, v^{\pi_k})B(v^{\pi_{k+1}}, \ldots, v^{\pi_{k+\ell}}). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\wedge$ wird auf den Raum

$$\Lambda V^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V^*$$

linear fortgesetzt und ist ein assoziatives und distributives Produkt (linear über $\mathbb{R}$ in jedem Faktor) auf diesem Raum, macht ihn also zu einer Algebra. Das Keilprodukt ist aber nicht kommutativ, sondern erfüllt die Regel

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$$

für $\alpha \in \Lambda^k V^*$ und $\beta \in \Lambda^\ell V^*$.

Das Keilprodukt ermöglicht uns auch die bequeme Angabe einer Basis von $\Lambda^k V^*$. Es ist nämlich für ein beliebiges $A \in \Lambda^k V^*$

$$\begin{aligned} A(v^1, \ldots, v^k) &= A\left(\sum_{j_1=1}^{n} f_{j_1}(v^1)f^j, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} f_{j_k}(v^k)f^{j_k}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} f_{j_1}(v^1) \cdots f_{j_k}(v^k) A\left(f^j, \ldots, \ f^{j_k}\right) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_k=1}^{n} f_{j_1}(v^1) \cdots f_{j_k}(v^k) A^{j_1 \cdots j_k} \\ &= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \sum_{\pi \in S_k} (\operatorname{sgn} \pi) f_{j_1}(v^{\pi_1}) \cdots f_{j_k}(v^{\pi_k}) A^{j_1 \cdots j_k} \end{aligned} \quad ,$$

also

$$A = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} A^{j_1 \cdots j_k} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k}.$$

In Koordinaten ausgedrückt ergibt sich somit unter Verwendung der Notation $v_k^j = f_k(v^j)$, dass

$$A(v^1, \ldots, v^k) = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} A^{j_1 \cdots j_k} \begin{vmatrix} v_{j_1}^1 & \ldots & v_{j_k}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{j_1}^k & \ldots & v_{j_k}^k \end{vmatrix}$$

ist.

Wir erhalten auch, dass $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$, und $\dim \Lambda V^* = 2^n$. Ein Spezialfall ist damit $k = n$, da $\dim \Lambda^n V^* = 1$. Eine spezielle Wahl einer nichtverschwindenden n-Form $\omega_+ \in \Lambda^n V^*$ legt damit eine *Orientierung* von V fest; wir sagen, eine Basis $\{v^1, \ldots, v^n\}$ ist positiv orientiert, wenn $\omega_+(v^1, \ldots, v^n) > 0$, und negativ orientiert, wenn $\omega_+(v^1, \ldots, v^n) < 0$. Jede Basis ist also entweder positiv oder negativ orientiert, und wir können umgekehrt auch eine spezielle Basis als positiv orientiert auszeichnen. In jedem Fall kann jeder n-dimensionaler Vektorraum mit insgesamt 2 Orientierungen versehen werden.

7.2. Definition von k-Formen.

Definition 12. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine Abbildung $\omega\colon \mathfrak{X}(U)^k \to C^\infty(U)$ heisst eine k-Form auf U, wenn ω linear über $C^\infty(U)$ in jeder Veränderlichen ist,

$$\omega(X^1, \dots, X^j + fY^j, \dots, X^k) = \omega(X^1, \dots, X^j, \dots, X^k) + fA(X^1, \dots, Y^j, \dots, X^k)$$

für beliebige $X^\ell, Y^\ell \in \mathfrak{X}(U)$, $f \in C^\infty(U)$, und $1 \le j \le k$, und alternierend,

$$\omega(X^1, \dots, X^j, \dots, X^\ell, \dots X^k) = -\omega(X^1, \dots, X^\ell, \dots, X^j, \dots X^k), \quad 1 \le j < \ell \le k,$$

ist. Der Raum der k-Formen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet und wird mit der üblichen Festsetzung

$$(\alpha + f\beta)(X^1, \dots, X^k) = \alpha(X^1, \dots, X^k) + f\beta(X^1, \dots, X^k)$$

zu einem Modul über $C^\infty(U)$ (d.h. die gleichen Rechenregeln wie in einem Vektorraum, aber die Skalare sind Elemente des Rings $C^\infty(U)$).

Lemma 9. *Sei $\alpha \in \Omega^k(U)$, $p \in U$. Dann gibt es ein $A =: \alpha_p \in \Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^N$ sodass*

$$\alpha(X^1, \dots, X^k)(p) = \alpha_p(X_p^1, \dots, X_p^k)$$

für beliebige Vektorfelder $X^1, \dots, X^k \in \mathfrak{X}(U)$ ist.

Beweis. Wir können X^j mit Hilfe der Standardbasis schreiben:

$$X^j = \sum_{\ell=1}^N X_\ell^j \frac{\partial}{\partial x_\ell}, \quad X_\ell^j \in C^\infty(U).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \alpha(X^1, \dots, X^k)(p) &= \alpha\left(\sum_{\ell_1=1}^n X_{\ell_1}^1 \frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}}, \dots, \sum_{\ell_k=1}^n X_{\ell_k}^k \frac{\partial}{\partial x_{\ell_k}}\right)(p) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n X_{\ell_1}^1(p) \cdots X_{\ell_k}^k(p) \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{\ell_k}}\right)(p) \end{aligned},$$

und der letzte Ausdruck kann offensichtlich in der geforderten Form geschrieben werden. □

Wir können nun das *Keilprodukt* einer k-Form $\alpha \in \Omega^k(U)$ mit einer ℓ-Form $\beta\Omega^\ell(U)$ als $k+\ell$-Form $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(U)$ durch

$$\alpha \wedge \beta(X^1, \dots, X^{k+\ell})(p) = \alpha_p \wedge \beta_p(X_p^1, \dots, X_p^{k+\ell})$$

definieren; zu überprüfen gilt nur, dass durch die rechte Seite wieder eine glatte Funktion auf U definiert wird, was wegen der Definition von $\alpha_p \wedge \beta_p$ klar ist:

$$\alpha \wedge \beta(X^1, \dots, X^{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\pi \in S_{k+\ell}} \alpha(X^{\pi_1}, \dots X^{\pi_k}) \beta(X^{\pi_{k+1}}, X^{\pi_{k+\ell}}),$$

und die rechte Seite ist offensichtlich glatt auf U.

Dieses Produkt erfüllt nun dieselben Rechenregeln wie das oben eingeführte Keilprodukt zwischen alternierenden Multilinearformen:

$$\alpha \wedge (\beta + f\gamma) = \alpha \wedge \beta + f\alpha \wedge \gamma, \quad \alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \in \Omega^k(U), \beta \in \Omega^\ell(U), f \in C^\infty(U).$$

Wenn wir die Rechnung im Beweis oben weiterführen, sehen wir, dass man mit Hilfe der 1-Formen $dx_1, \dots, dx_N$ jede k-Form α als

$$\begin{aligned}
\alpha(X^1, \dots, X^k) &= \alpha\left(\sum_{\ell_1=1}^n X^1_{\ell_1} \frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}}, \dots, \sum_{\ell_k=1}^n X^k_{\ell_k} \frac{\partial}{\partial x_{\ell_k}}\right) \\
&= \sum_{\ell_1=1}^n \cdots \sum_{\ell_k=1}^n X^1_{\ell_1} \cdots X^k_{\ell_k} \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{\ell_k}}\right) \\
&= \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N} \sum_{\pi \in S_k} (\operatorname{sgn} \pi) X^{\pi_1}_{\ell_1} \cdots X^{\pi_k}_{\ell_k} \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{\ell_k}}\right) \\
&= \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N} \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_{\ell_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{\ell_k}}\right) dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k}(X^1, \dots, X^k)
\end{aligned}$$

schreiben, d.h. *jede k-Form α lässt sich als C^∞-Linearkombination der Basisformen*

$$dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k}, \quad 1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N$$

schreiben.

7.3. Das äussere Differential. Wir können den Operator d, den wir schon für glatte Funktionen und 1-Formen definiert haben, auf eine und nur eine Art auf

$$\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^N \Omega(U)$$

fortsetzen, sodass die für $f, g \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ gültige Regel $d(f dg) = df \wedge dg$ erhalten bleibt: Wir definieren für

$$\alpha = \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N} \alpha^{\ell_1 \dots \ell_k} dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k} \in \Omega^k(U)$$

$$d\alpha = \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N} (d\alpha^{\ell_1 \dots \ell_k}) \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k} \in \Omega^{k+1}(U).$$

Der resultierende Operator $d \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ erfüllt die folgende Verallgemeinerung der Leibnizregel:

Lemma 10. *Für $\alpha \in \Omega^k(U)$ und $\beta \in \Omega^r(U)$ gilt*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N} \alpha^{\ell_1 \dots \ell_k} dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k} \\
\beta &= \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_r \le N} \beta^{\ell_1 \dots \ell_r} dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_r}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N \\ 1 \le \ell_1 < \dots < \ell_r \le N}} \alpha^{\ell_1 \dots \ell_k} \beta^{\ell_1 \dots \ell_r} dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_r},$$

also ergibt sich unter Verwendung der Rechenregeln für das Keilprodukt und der Tatsache, dass $d(fg) = fdg + gdf$:

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{\substack{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N \\ 1 \le \ell_1 < \dots < \ell_r \le N}} d(\alpha^{\ell_1 \dots \ell_k} \beta^{\ell_1 \dots \ell_r}) \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_r} \\
&= \sum_{\substack{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N \\ 1 \le \ell_1 < \dots < \ell_r \le N}} \big(\alpha^{\ell_1 \dots \ell_k} d\beta^{\ell_1 \dots \ell_r} + \beta^{\ell_1 \dots \ell_r} d\alpha^{\ell_1 \dots \ell_k}\big) \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_r} \\
&= \sum_{\substack{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N \\ 1 \le \ell_1 < \dots < \ell_r \le N}} \big(d\alpha^{\ell_1 \dots \ell_k} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k}\big) \wedge \big(\beta^{\ell_1 \dots \ell_r} dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_r}\big) \\
&\quad + (-1)^k \sum_{\substack{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N \\ 1 \le \ell_1 < \dots < \ell_r \le N}} \big(\alpha^{\ell_1 \dots \ell_k} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_k}\big) \wedge \big(d\beta^{\ell_1 \dots \ell_r} \wedge dx_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dx_{\ell_r}\big) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

□

Die Leibnizregel bedingt wieder, dass exakte Formen geschlossen sind: Eine Form $\alpha \in \Omega^k(U)$ heisst *geschlossen*, wenn $d\alpha = 0$ ist, und exakt, wenn $\alpha = d\beta$ für ein $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ ist.

LEMMA 11. *Es ist $d \circ d = 0$, d.h. für jede Form $\alpha \in \Omega^k(U)$ ist $d(d\alpha) = 0$.*

Wir empfehlen dem Leser, die Rechnung durchzuführen.

7.4. Der Pullback-Operator. Seien nun $U \subset \mathbb{R}^N_x$ und $V \subset \mathbb{R}^{N'}_y$ offene Mengen, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{N'}) \colon U \to V$ eine glatte Abbildung. Wir haben für 0- und für 1-Formen bereits den Operator

$$\Phi^* \colon \Omega^0(V) \to \Omega^0(U), \quad \Phi^* f = f \circ \Phi,$$

$$\Phi^* \colon \Omega^1(V) \to \Omega^1(U), \quad \Phi^* \alpha(X)(p) = \alpha_{\Phi(p)}(\Phi'(p) X_p),$$

kennengelernt. Die Definition von Φ^* auf 1-Formen nimmt eine der wichtigsten Eigenschaften von Φ^* vorweg: Es ist

$$(\Phi^* df)(X)(p) = (df)_{\Phi(p)}(\Phi'(p) X_p) = d(f \circ \Phi)(X)(p),$$

also $\Phi^* \circ d = d \circ \Phi^*$. Wir definieren nun allgemein, für

$$\alpha = \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N'} \alpha^{\ell_1 \dots \ell_k} dy_{\ell_1} \wedge \dots \wedge dy_{\ell_k} \in \Omega^k(V),$$

die Form $\Phi^* \alpha \in \Omega^k(U)$ durch

$$\Phi^* \alpha = \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N} (\Phi^* \alpha^{\ell_1 \dots \ell_k}) d\Phi_{\ell_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{\ell_k} \in \Omega^k(U).$$

Das so definierte Φ^* erfüllt, dass

$$\Phi^* \alpha(X^1, \dots, X^k)(p) = \alpha_{\Phi(p)}(\Phi'(p) X^1_p, \dots, \Phi'(p) X^k_p).$$

In der Tat ist ja

$$\begin{aligned}
\Phi^* \alpha(X^1, \dots, X^k)(p) &= \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N} (\Phi^* \alpha^{\ell_1 \dots \ell_k})(p) d\Phi_{\ell_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{\ell_k}(X^1, \dots, X^k)(p) \\
&= \sum_{1 \le \ell_1 < \dots < \ell_k \le N} (\Phi^* \alpha^{\ell_1 \dots \ell_k})(p) \begin{vmatrix} X^1 \Phi_{\ell_1} & \dots & X^k \Phi_{\ell_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X^1 \Phi_{\ell_k} & \dots & X^k \Phi_{\ell_k} \end{vmatrix} \qquad ,
\end{aligned}$$

da ja ganz allgemein unter Verwendung von Standardkoordinaten

$$\Phi'(p)X_p = \begin{pmatrix} X_p\Phi_1 \\ \vdots \\ X_p\Phi_{N'} \end{pmatrix}, \quad X_p \in T_p\mathbb{R}^N$$

gilt.

Die Definition von Φ^* bedingt, dass Φ^* nicht nur linear, sondern auch mit dem Keilprodukt verträglich ist:

$$\Phi^*(\alpha_1 + f\alpha_2) = \Phi^*\alpha_1 + (\Phi^* f)\Phi^*\alpha_2, \quad \Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta).$$

Φ^* ist also ein Algebrahomomorphismus, wenn man es als Abbildung $\Phi^* \colon \Omega(V) \to \Omega(U)$ auffasst.

Weiters bedingt sie, dass $\Phi^* \circ d = d \circ \Phi^*$ ganz allgemein gilt, also die folgende allgemeine Kettenregel:

Lemma 12. *Sei $\alpha \in \Omega^k(V)$. Dann gilt $d(\Phi^*\alpha) = \Phi^*(d\alpha)$.*

Beweis. Unter Verwendung unserer üblichen Formel für $d\alpha$ und der Tatsache, dass für 0-Formen definitionsgemäss $\Phi^* df = d\Phi^* f$ ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Phi^*(d\alpha) &= \Phi^*\left(\sum_{1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_k \le N'} (d\alpha^{\ell_1 \ldots \ell_k}) \wedge dy_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge dy_{\ell_k} \right) \\
&= \sum_{1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_k \le N'} \Phi^*\big((d\alpha^{\ell_1 \ldots \ell_k}) \wedge dy_{\ell_1} \wedge \cdots \wedge dy_{\ell_k} \big) \\
&= \sum_{1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_k \le N'} (\Phi^* d\alpha^{\ell_1 \ldots \ell_k}) \wedge (\Phi^* dy_{\ell_1}) \wedge \cdots \wedge (\Phi^* dy_{\ell_k}) \\
&= \sum_{1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_k \le N'} (d\Phi^* \alpha^{\ell_1 \ldots \ell_k}) \wedge (d\Phi_{\ell_1}) \wedge \cdots \wedge (d\Phi_{\ell_k}) \\
&= d \sum_{1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_k \le N'} (\Phi^* \alpha^{\ell_1 \ldots \ell_k}) \wedge (d\Phi_{\ell_1}) \wedge \cdots \wedge (d\Phi_{\ell_k}) \\
&= d(\Phi^*\alpha),
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile die Leibnizregel verwendet haben. □

8. Integration von Differentialformen

Wir nehmen nun an, dass $U = \mathbb{R}^n_s$ und $\alpha \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n_s)$ ist, d.h. kompakten Träger in $\mathbb{R}^n$ hat:

$$\alpha = \tilde{\alpha} ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n, \quad \tilde{\alpha} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n).$$

Wir wählen nun $A > 0$ so gross, dass $\operatorname{supp}(\tilde{\alpha}) \subset [-A, A]^n$ ist, und definieren

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{-A}^{A} \cdots \int_{-A}^{A} \tilde{\alpha} ds_1 \ldots ds_n = \int_{-A}^{A} \left(\int_{-A}^{A} \left(\cdots \left(\int_{-A}^{A} \tilde{\alpha}(s_1, \ldots, s_n) ds_1 \right) \cdots \right) ds_{n-1} \right) ds_n.$$

Wir erinnern daran, dass wir eine Form $\beta \in \Omega^k(U)$ geschlossen nennen, wenn $d\beta = 0$ ist, und exakt, wenn $\alpha = d\beta$ für ein $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ ist. Für $\alpha \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ ist trivialerweise $d\alpha = 0$. Auf der anderen Seite ist α auch exakt (wobei wir hier die Kompaktheit des Trägers nicht benötigen: Wenn $\beta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ ist, so können wir

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \beta^j ds_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{\widehat{ds_j}}_{\text{ausgelassen}} \wedge \cdots \wedge ds_n$$

schreiben, es ist also

$$d\beta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \beta^j}{\partial s_j} ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n.$$

Wir erhalten damit für $\alpha = \tilde{\alpha} ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n$ eine "Stammform"

$$\beta = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 \tilde{\alpha}(s_1, \ldots, ts_j, \ldots, s_n) s_j dt \right) ds_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{ds_j} \wedge \cdots \wedge ds_n;$$

diese ist natürlich Wenn α nicht nur kompakten Träger hat, sondern sogar die Ableitung einer Form $\beta \in \Omega_c^{n-1}$ ist, die selber kompakten Träger hat, so können wir eine interessante Aussage über das Integral treffen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\beta = 0, \quad \beta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n).$$

Dies folgt mit Hilfe des Fundamentalsatzes:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial \beta^j}{\partial s_j} ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n &= \int_{-A}^{A} \cdots \int_{-A}^{A} \frac{\partial \beta^j}{\partial s_j} ds_1 \ldots ds_n \\
&= \int_{-A}^{A} \left(\cdots \left(\int_{-A}^{A} \left(\cdots \left(\int_{-A}^{A} \frac{\partial \beta^j}{\partial s_j}(s_1, \ldots, s_n) ds_1 \right) \cdots \right) ds_j \right) \cdots \right) ds_n \\
&= \int_{-A}^{A} \left(\cdots \left(\int_{-A}^{A} \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\cdots \left(\int_{-A}^{A} \beta^j(s_1, \ldots, s_n) ds_1 \right) \cdots \right) ds_j \right) \cdots \right) ds_n \qquad (1) \\
&= \int_{-A}^{A} \left(\cdots \left(\cdots \left(\int_{-A}^{A} \beta^j(s_1, \ldots, s_n) \Big|_{s_j=-A}^{s_j=A} ds_1 \right) \ldots ds_{j-1} \right) ds_{j+1} \ldots \right) ds_n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da nach Wahl von A der Punkt $(s_1, \ldots, \pm A, \ldots, s_n) \notin \operatorname{supp} \beta_j$ ist. Also gilt auch

$$\int d\beta = \sum_{j=1}^{n} \int \frac{\partial \beta^j}{\partial s_j} ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n = 0.$$

Wir wollen nun den Fall betrachten, in dem unser Integrationsbereich den Träger von β nicht vollständig beinhaltet. Wir betrachten dazu zunächst den Bereich $H = \{s_1 < 0\}$ mit seinem Rand $\partial H = \{s_1 = 0\}$, den wir mit $\mathbb{R}^{n-1}$ identifizieren. Wir definieren dann ganz entsprechend

$$\int_H \alpha = \int_{-A}^{A} \cdots \int_{-A}^{A} \tilde{\alpha} ds_1 \ldots ds_n = \int_{-A}^{A} \left(\int_{-A}^{A} \left(\cdots \left(\int_{-A}^{0} \tilde{\alpha}(s_1, \ldots, s_n) ds_1 \right) \cdots \right) ds_{n-1} \right) ds_n,$$

wobei A wiederum so gross gewählt ist, dass $\operatorname{supp} \tilde{\alpha} \subset [-A, A]^n$ gilt.

Allgemeiner definieren wir für ein Gebiet der Form

$$\begin{aligned}
U = \{(x_1, \ldots, x_N) \colon & a < x_N < b, \\
& f_1(x_N) < x_{N-1} < g_1(x_N), \\
& f_2(x_{N-1}, x_N) < x_{N-2} < g_2(x_{N-1}, x_N), \\
& \ldots \\
& f_{N-1}(x_1, \ldots, x_{N-1}) < x_1 < g_{N-1}(x_1, \ldots, x_{N-1})\},
\end{aligned}$$

wo f_j, g_j stetig sind, und $\omega = \varphi dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N \in \Omega^N(U)$ das Integral

$$\int_U \omega := \int_U \varphi dx_1 \ldots dx_N := \int_a^b \int_{f_1(x_{N-1})}^{g_1(x_{N-1})} \cdots \int_{f_{N-1}(x_1, \ldots, x_{N-1})}^{f_{N-1}(x_1, \ldots, x_{N-1})} \varphi(x_1, \ldots, x_{N-1}) dx_1 \ldots dx_N.$$

Wir können nun für $j \neq 1$ die Rechnung (1) direkt übernehmen (und in den Grenzen des innersten Integrals A durch 0 ersetzen). Auf der anderen Seite ist

$$
\begin{aligned}
\int_H \frac{\partial \beta^1}{\partial s_1} ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n &= \int_{-A}^{A} \left(\int_{-A}^{A} \left(\ldots \left(\int_{-A}^{0} \frac{\partial \beta^n}{\partial s_n}(s_1, \ldots, s_n) ds_1 \right) \ldots \right) ds_{n-1} \right) ds_n \\
&= \int_{-A}^{A} \frac{\partial}{\partial s_n} \left(\int_{-A}^{A} \left(\ldots \left(\int_{-A}^{A} \beta^1(s_1, \ldots, s_n) ds_1 \right) ds_2 \ldots \right) ds_{n-1} \right) ds_n \\
&= \int_{-A}^{A} \left(\ldots \left(\int_{-A}^{A} \beta^1(0, s_2, \ldots, s_n)) ds_1 \right) \ldots \right) ds_{n-1},
\end{aligned}
$$

also zusammengenommen

$$
\int_H d\beta = \int_{-A}^{A} \left(\ldots \left(\int_{-A}^{A} \beta^n(0, s_2, \ldots, s_n)) ds_2 \right) \ldots \right) ds_{n-1}
$$

und damit

$$
\int_H d\beta = \int_{\partial H} \beta.
$$

Für eine n-Form α auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ würden wir nun gerne das Integral

$$
\int_M \alpha
$$

definieren, und zeigen, dass für eine berandete Mannigfaltigkeit die Gleichung

$$
\int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta
$$

gilt.

9. Orientierbarkeit und Ränder von Teilmannigfaltigkeiten

Definition 13. Wir sagen, eine Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ (wie üblich, $\dim M = n$) ist orientierbar, wenn es eine Form $\omega_+ \in \Omega^n(\mathbb{R}^N)$ gibt, sodass $(\omega_+)_p|_{(T_pM)^n}$ eine nichttriviale alternierende n-Form auf T_pM für $p \in M$ ist.

Orientierbare Teilmannigfaltigkeiten sind also solche, auf denen es möglich ist, eine "zusammenpassende" Orientierung auf den Tangentialräumen zu finden.

Beispiel 13. Wenn $U \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge ist, für die ∂U eine glatte Hyperfläche ist, so ist ∂U orientierbar. Dazu bemerken wir, dass es für $p \in \partial U$ einen eindeutig bestimmten Einheitsvektor n_p gibt, der normal auf $T_p\partial U$ ist und "nach aussen zeigt", also $p + \varepsilon n_p \notin U$ für $\varepsilon > 0$ klein erfüllt. Wir setzen n_p zu einem glatten Vektorfeld auf $\mathbb{R}^N$ ford und definieren dann

$$
\omega_+(X^1, \ldots, X^n) = (n_p, X_1, \ldots, X_n).
$$

Eingeschränkt auf $T_p\partial U$ ist $(\omega_+)_p$ offensichtlich nicht trivial und definiert die "Standardorientierung" von ∂U.

Beispiel 14. Das Möbiusband ist nicht orientierbar. Aus den Übungen wissen wir nämlich, dass Orientierbarkeit einer Hyperfläche äquivalent zur Existenz eines Normalenvektorfeldes ist, und wir haben in den Übungen auch schon gezeigt, dass ein solches für das Möbiusband nicht existiert.

Definition 14. Eine Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ heisst *Teilmannigfaltigkeit mit Rand*, wenn es für jedes $p \in \partial M$ eine offene Umgebung $U(p) \in \mathcal{N}(p)$ gibt und glatte Koordinaten $(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_d) = \Phi(x_1, \ldots, x_N)$ in U sodass $\Phi(M \cap U) = \{t = 0, s_1 < 0\}$.

Lemma 13. *Wenn $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Teilmannigfaltigkeit mit Rand ist, so ist $\partial M \subset \mathbb{R}^N$ eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension* $\dim \partial M = \dim M - 1$. *Wenn M orientierbar ist, so ist auch ∂M orientierbar.*

Beweis. Sei $p \in \partial M$. Nach Definition gibt es dann glatte Koordinaten $\Phi\colon U \to \Phi(U) \subset \mathbb{R}^N$, wie in der Definition, sodass $\Phi(M \cap U) = \{s_1 < 0, t_1 = \cdots = t_d = 0\}$. Wir behaupten, dass $\Phi(\partial M \cap U) = \{s_1 = 0, t_1 = \cdots = t_d = 0\}$; daraus ergibt sich, da p beliebig war, dass ∂U eine Teilmannigfaltigkeit ist, der Kodimension $d+1$, also $\dim \partial M = \dim M - 1$. Sei also $q \in \partial M \cap U$. Dann gibt es eine Folge von Punkten $p_j \in M$ mit $p_j \to q (j \to \infty)$; es folgt $\Phi_1(p_j) \to \Phi_1(q)$, also $\Phi_1(q) \leq 0$. Da $q \notin M$, ist also $\Phi_1(q) = 0$. Natürlich ist auch $\Phi_{n+k}(q) = \lim_{j\to\infty} \Phi_{n+k}(p_j) = 0$, also $\Phi(p) \in \{s_1 = t_1 = \cdots = t_d = 0\}$. Ist umgekehrt q mit $\Phi_1(q) = \Phi_{n+1}(q) = \doteq \Phi_{n+d}(q) = 0$ gegeben, so sind für $j \geq j_0$ die Punkte $(-1/j, \Phi_2(q), \ldots, \Phi_n(q), 0, \ldots, 0) \in \Phi(U)$ und $q_j = \Phi^{-1}(-1/j, \Phi_2(q), \ldots, \Phi_n(q), 0, \ldots, 0) \in M \cap U$, mit $q_j \to q$, also $q \in \overline{M} \cap U$, aber $q \notin M$, und damit $q \in \partial M$.

Wir betrachten nun einen Punkt $p \in \partial M$, wieder mit Koordinaten $\Phi^p\colon U^p \to \mathbb{R}^N$ wie oben versehen, wobei wir U^p als kleine Bälle um p wählen, und definieren für $q \in M$ durch

$$T_q M = \left((\Phi^p)^{-1}\right)' (\Phi(q))(\{t_1 = \cdots = t_d = 0\})$$

auch den Tangentialraum von M im Punkt q (dieser ist unabhängig von der Wahl von Φ^p). Wegen $T_q \partial M = \left((\Phi^p)^{-1}\right)' (\Phi(q))(\{t_1 = \cdots = t_d = s_1 = 0\})$ ist also $T_q \partial M \subset T_q M$. Wir definieren n_q^p, $q \in U \cap \partial M$, als den "äusseren Einheitsnormalenvektor", d.h. $T_q \partial M \oplus^\perp \langle n_q^p \rangle = T_p M$, und n_q^p ist so gewählt, dass $(\Phi^p)'(q)(n_q^p) \in \{s_1 > 0\}$. Wir können n_q^p zu einem glatten Vektorfeld auf U^p fortsetzen, indem wir

$$n_x^p = \left((\Phi^p)^{-1}\right)' (\Phi(x))((\Phi^p)'(q(x))n_{q(x)}^p), \quad q(x) = (\Phi^p){-}1(0, \Phi_2^p(x), \ldots, \Phi_n^p(x), 0, \ldots, 0)$$

setzen.

Sei nun $(\psi^p)_{p \in \partial M}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich der Mengen $\{U^p\colon p \in \partial M\}$; wir definieren

$$n = \sum_p \psi^p(x) n^p(x).$$

Dann ist n, trivial durch 0 fortgesetzt, ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^N$, und wir können falls M durch $\omega^M \in \Omega^n(\mathbb{R}^N)$ orientiert ist, durch $\omega^{\partial M}(X^1, \ldots, X^{n-1}) = \omega^M(n, X^1, \ldots, X^{n-1})$ eine Orientierung auf ∂M definieren. $\square$

Wir bezeichnen die von der Form $\omega^{\partial M}$ kommende Orientierung als die von M induzierte Orientierung von ∂M.

Sei nun M eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Wir definieren, für $\omega \in \Omega^n(U)$, wo $U \supset M$ offen ist, das Integral

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \psi^\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{V^\alpha} (\varphi^\alpha)^*(\psi^\alpha \omega),$$

wobei $\varphi^\alpha\colon V^\alpha \to \mathbb{R}^N$ Parametrisierungen von M sind, V^α ein geeignet gewähltes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist, und ψ^α eine Zerlegung der Eins ist, deren Träger die Eigenschaft haben, dass $\operatorname{supp} \psi^\alpha \cup M \subset \varphi^\alpha(V^\alpha)$, und für die gilt, dass $\{(\varphi^\alpha)'(s)\frac{\partial}{\partial s_1}|_s, \ldots, (\varphi^\alpha)'(s)\frac{\partial}{\partial s_n}|_s\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_{\varphi(s)}M$ ist. Wir werden später sehen, dass das so definierte Integral einer n-Form nicht von den getroffenen Wahlen abhängt.

10. Der Satz von Stokes

Satz 10. *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, und $\bar{M}$ kompakt. Weiters sei $\alpha \in \Omega^{n-1}(U)$, wo $U \supset \bar{M}$. Dann gilt*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$